УДК 517.948.34

М. Қ. ДАУЫЛБАЕВ, М. Ж. ӘДІЛБЕКОВА

(Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы)

СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ИНТЕГРАЛДЫ ШЕТТІК ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ БАҒАЛАУЫ

Аннотация. Екі үлкен туындысының алдында кіші параметрі бар үшінші ретті сызықты жай дифференциалдық теңдеулер үшін интегралды шеттік есепқосымша сипаттаушы теңдеулердің түбірлерінің теріс болғанда [1],қосымша сипаттаушы теңдеулердің түбірлерінің таңбалары қарама-қарсы болғанда [2] жұмыстарында қарастырылады. Осы есеп шешімінің аналитикалық формуласын алып, бағалаймыз.

Тірек сөздер:кіші параметр, асимптотика, бастапқы секіріс.

Ключевые слова:малый параметр, асимптотика, начальный скачок.

Keywords:small parameter, asymptotics, initial jump.

Екі үлкен туындыларының алдында кіші параметрі бар үшінші ретті сызықты келесі

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = F(t) \qquad (1)$$

дифференциалдық теңдеуді $[0,1]$ кесіндісінде төмендегі интегралды шекаралық шарттармен қарастырайық:

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha,$$
$$h_2 y(t,\varepsilon) \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta,$$
$$h_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) - \int_0^1 [a_0(x)y(x,\varepsilon) + a_1(x)y'(x,\varepsilon)]dx = \gamma, \qquad (2)$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, $\alpha,\beta,\gamma,a_i(x), i = 0,1 - \varepsilon$ – нан тәуелсіз белгілі тұрақтылар.

Бұл (1),(2) шекаралық есеп үшін төмендегі шарттар орындалсын:

I. $A(t),B(t),C(t),F(t) \in C^2[0,1]$.

II. $B(t) \neq 0, t \in [0,1]$.

III. $\mu_1(t) \neq \mu_2(t), \mu_i(t) < -\delta < 0,$ мұндағы $\mu_i(t), i = 1,2$ келесі қосымша «сипаттаушы» теңдеудің нақты теріс түбірлері:

$$\mu^2(t) + A(t)\mu(t) + B(t) = 0 \qquad (3)$$

IV. $\overline{\Delta} = a_1(0) - e^{-\int_0^1 \frac{C(s)}{B(s)}ds} + \int_0^1 (a_0(x) - \frac{a_1(x)C(x)}{B(x)})e^{-\int_0^x \frac{C(s)}{B(s)}} dx \neq 0.$

Лемма1. Егер I–III шарттар орындалса, онда (1.2.4) біртекті теңдеудің $y_i(t,\varepsilon), i = 1,2,3$ іргелі шешімдер жүйесі $\varepsilon \to 0$ туындыларымен келесі асимптотикалық түрде жазылады:

$$y_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_i(x)dx} (\mu_i^j(t)y_{i0}(t) + \varepsilon(j\mu_i^{j-1}(t)y_{i0}'(t) +$$
$$+ \frac{j(j-1)}{2}\mu_i^{j-2}(t)\mu_i'(t)y_{i0}(t) + \mu_i^j(t)y_{i1}(t)) + O(\varepsilon^2)), j = \overline{0,2}, i = \overline{1,2},$$
$$y_3^{(i)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(i)}(t) + \varepsilon y_{31}^{(i)}(t) + O(\varepsilon^2), i = \overline{0,2}, \qquad (4)$$

Мұндағы $y_{i0}(t)$, $y_{i1}(t)$, $i = \overline{1,3}$, коэффициенттері сәйкесінше келесі есептердің шешімдері:

$$(3\mu_i^2(t) + 2A(t)\mu_i(t) + B(t))y_{i0}'(t) + (3\mu_i(t)\mu_i'(t) + A(t)\mu_i'(t) + C(t))y_{i0}(t) = 0, y_{i0}(0) = 1,$$
$$(3\mu_i^2(t) + 2A(t)\mu_i(t) + B(t))y_{i1}'(t) + (3\mu_i(t)\mu_i'(t) + A(t)\mu_i'(t) + C(t))y_{i1}(t) =$$
$$= -(3\mu_i(t) + A(t))y_{i0}''(t) - 3\mu_i'(t)y_{i0}'(t) - \mu_i''(t)y_{i0}(t), y_{i1}(0) = 0, i = 1,2,$$
$$B(t)y_{30}'(t) + C(t)y_{30}(t) = 0, y_{30}(0) = 1,$$
$$B(t)y_{31}'(t) + C(t)y_{31}(t) = -A(t)y_{30}''(t), y_{31}(0) = 0.$$
$$K(t,s,\varepsilon), 0 \le s \le t \le 1$$

функциясы келесі есептің шешімі болсын:

$L_\varepsilon K(t,s,\varepsilon) = 0, K(s,s,\varepsilon) = 0, K'(s,s,\varepsilon) = 0, K''(s,s,\varepsilon) = 1.$

Теорема 1. Егер I-III шарттар орындалса, онда Коши функциясы $K(t,s,\varepsilon), 0 \le s \le t \le 1$ облысында бар, жалғыз және төмендегі формуламен анықталады:

$$K(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{W(s,\varepsilon)} W_3(t,s,\varepsilon), \qquad (5)$$

мұндағы $W(s,\varepsilon) \neq 0 - y_1(s,\varepsilon), y_2(s,\varepsilon), y_3(s,\varepsilon)$ іргелі шешімдер жүйесінің вронскианы, ал $W_3(t,s,\varepsilon)$ вронскиан $W(s,\varepsilon)$ үшінші жатық жолын $y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon), y_3(t,\varepsilon)$ іргелі шешімдер жүйесімен алмастырғанда алынатын анықтауыш.

$\Phi_i(t,\varepsilon), i = \overline{1,3}$ функциялары келесі есептің шешімі болсын:

$$L_\varepsilon \Phi_i(t,\varepsilon)=0, h_k\Phi_i(t,\varepsilon)=\delta_{ki}, k=\overline{1,3}, i=\overline{1,3}.$$

$\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,3}$ функциялары шекаралық функциялар деп аталады.

$\Delta(\varepsilon)$ анықтауышы (4) көмегімен $\varepsilon\to 0$ келесі асимптотикалық түрде өрнектеледі:

$$\Delta(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}[(\mu_1(0)-\mu_2(0))\overline{\Delta}+O(\varepsilon)]\neq 0.$$

Теорема 2. Егер I-Iv шарттары орындалса, онда $\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,3}$ шекаралық функциялары $0\le t\le 1$ кесіндісінде бар, жалғыз және төмендегі формуламен өрнектеледі:

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{\Delta_i(t,\varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, i=\overline{1,3} \tag{7}$$

мұндағы $\Delta_i(t,\varepsilon)$ анықтауышы $\Delta(\varepsilon)\neq 0$ анықтауышынан оның I-ші жатық жолын $y_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,3}$ іргелі шешімдер жүйесімен алмастырғаннан алынған анықтауыштар.

Теорема 3. Егер I-Iv шарттар орындалса, онда (1), (2) есептің $[0,1]$ кесіндісінде шешімі бар, жалғыз және келесі формуламен өрнектеледі:

$$\text{y(t,}\varepsilon)=\alpha\Phi_1(t,\varepsilon)+\beta\Phi_2(t,\varepsilon)+[\gamma-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 H(s,\varepsilon)F(s)ds]\Phi_3(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)F(s)ds. \tag{9}$$

Мұндағы $H(s,\varepsilon)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}K(1,s,\varepsilon)-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\int_s^1(a_0(x)K(x,s,\varepsilon)+a_1(x)K'(x,s,\varepsilon))dx$

$H(s,\varepsilon)$ функциясының (6) көмегімен асимптотикалық сипаты келесі түрде болады:

$$\begin{aligned}H(s,\varepsilon)=&\frac{a_1(s)-y_{30}(1)+\int_s^1(a_0(x)y_{30}(x)+a_1(x)y_{30}'(x))dx}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}+\\&+\frac{y_{20}(1)-a_1(1)}{y_{20}(s)\mu_2(s)(\mu_2(s)-\mu_1(s))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}-\\&-\frac{y_{10}(1)-a_1(1)}{y_{10}(s)\mu_1(s)(\mu_2(s)-\mu_1(s))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)dx}+O(\varepsilon).\end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 4. Егер I - Iv шарттары орындалса, онда қарастырып отырған (1), (2) шекаралық есептің шешімінің [0,1] кесіндісінде асимптотикалық бағалаулары төмендегі формулалармен өрнектеледі:

$$\left|y^{(j)}(t,\varepsilon)\right|\le C\left|\alpha\cdot a_1(0)-\gamma\right|+\varepsilon^2|\beta|+\max|F(t)|)+\frac{1}{\varepsilon^2}(|\alpha|+\varepsilon|\beta|+|\gamma|+\max|F(t)|)e^{-\delta\frac{t}{\varepsilon}}, j=\overline{0,2}, \tag{11}$$

Бұл теоремадан $y^{(j)}(0,\varepsilon)=O(1), j=0,1,\quad y''(0,\varepsilon)=O(\frac{1}{\varepsilon^2})$. екендігі шығады.

ӘДЕБИЕТ

1 Касымов К.К., Шарипова Ж.У. Асимптотические оценки решения краевой задачи для сингулярно возмущенных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник КазГУ. серия мат. 1994. Вып.1. С.146.

2 Нургабыл Д.Н., Уаисов А.Б. О граничных скачках линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Вестник ЖГУ им.И.Жансугурова.2012. № 4. С.17-21.

REFERENCES

1 Kasymov K.A.,Sharipova Zh.U. Asimptoticheskiye otsenki resheniya kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennykh lineynykh differentsialnykh uravneny tretyego poryadka // Vestnik KazGU,seriya mat. 1994. Vyr.1. P.146.