УДК

Р. М. ИБАДОВ

(Самаркандский Государственный университет, Самарканд, Узбекистан)

ВРАЩАТЕЛЬНО-ИНВАРИАНТНАЯ КАЛИБРОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ С КОМПАКТНЫМ ИМПУЛЬСНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Абстракт. В теории с дискретным радиусом, но непрерывными угловыми координатаии, основанной на замене плоского импульсного пространства в евклидовой формулировке теории на сферическое с конечным радиусом M, согласуется с принципом калибровочной инвариантности и не приводит к нарушению вращательной симметрии.

При этом правило калибровочного преобразования существенно модифицируется, превращаясь в комбинацию стандартных преобразований Янга-Миллса и преобразований характерных для теории поля на кубической решетке с шагом $\frac{1}{M}$.

Намеченный подход может быт принят теперь как основа дальнейшего развития радиальной решеточной теории с обобщением на случай Янга-Миллса и спинорных материальных полей.

Ключевые слова: калибровочные теории, свободная скалярная полевая модель, калибровочные преобразования и векторные поля, калибровочно – инвариантная скалярная электродинамика.

Тірек сөздер: калибрленген теория, еркін скалярлы өрістік модель, калибрленген түрлендіру және векторлық өріс, калибрлі-инвариантты скалярлы электродинамика.

Keywords: gauge theories, free scalar field model, gauge transformations and vector fields, gauge – invariant scalar electrodynamics.

Один из наиболее мощных методов непертубативных расчётов в калибровочных теориях основан на замене координатного континуума на кубическую решетку с шагом l . Импульсное пространство теории становится компактным, калибровочные преобразования векторного поля существенно модифицируются, хотя калибровочная группа остается той же самой. Однако в этом подходе вращательная симметрия оказывается нарушенной. Вращательная симметрия может быть сохранена в схеме с дискретным радиусом, но непрерывными угловыми координатами, т.е. в теории, основанной на радиальной решетке. Ключевая идея состоит в том, что мы заменяем импульсное евклидовое пространство на сферическое пространство $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_2^2+\rho_4^2+\rho_5^2=M^2$, здесь $-i\rho_{\downarrow}\mu n_{\downarrow}\mu))\uparrow(-3/2+rM)$. – шаг радиальной решетки. Оператор Лапласа-Бальтрам на этой поверхности (оператор Казимира группы $O(5)$) записываем в виде: $i\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\sqrt{g}g_{\mu\vartheta}i\frac{\partial}{\partial p_\vartheta}=\frac{1}{2}(M_{kl})^2$. Он обладает дискретным спектром $n(n+3), n=0,1,\dots$ Поскольку оператор Лапласа $\left[i\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right]^2$ в плоском импульсном пространстве имеет спектр собственных значений $r^2=(x^\mu)^2$, то мы связываем собственные значения оператор Казимирас квадратом радиуса вектора $r^2=\left(3/_2+n\right)^2\frac{1}{M^2}$. В результате возникает теория с дискретным радиусом, которая может быть согласована с принципом калибровочной инвариантности. Закон калибровочной инвариантности векторного поля модифицируется и представляет собой комбинацию стандартных преобразований Янга-Миллса с калибровочными преобразованиями, характерными для кубической решетки с шагом .

В новой схеме можно перейти от импульсного представления к конфигурационному представлению посредством интегрального преобразования

$\phi(r,n)=(2\pi)^{-2}\int[<p|r,n>\phi(p)]d\Omega(p)$ с ядром $\langle\rho\,|\,r,n\rangle=(\theta(r)+\theta(-r)\in(\rho_{\downarrow}5)(1/M(\rho_{\downarrow}5-$
$-i\rho_{\downarrow}\mu n_{\downarrow}\mu))\uparrow(-3/2+rM)$.

Здесь $d\Omega(p)=\left(\frac{p_5}{M}\right)^{-1}d^4p$ – ивариантная мера на сфере (1), $p_5=\pm(M^2-p_\mu^2)^{\frac{1}{2}}$, r – принимает дискретные собственные значения из (3), а n_μ есть единичный 4-мерный вектор, компоненты которого могут быть параметризованным сферическими углами

Ядро $<p|r,n>$ представляет собой собственное значение Лапласа-Бельтрами (2)

$$i\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\sqrt{g}g_{\mu\nu}i\frac{\partial}{\partial p_\nu}<p\Big|r,n>=(-(\frac{3}{2M})^2+r^2)<p|r,n> \qquad (5)$$

Подчиняющееся одновременно некоторому дифференциально-разностному уравнению в КП:

$$-_{r,n}<p|r,n>=-\left[(2M\sinh(\frac{2}{M}\frac{\partial}{\partial p}))^2+\frac{3M}{r}\sinh(\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial p})+\frac{\Delta(n)}{(r-\dfrac{1}{2M})}e^{\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial r}}\right]x \qquad (6)$$

$$x<p|r,n>=2M^2(1-p_5\frac{1}{M})<p|r,n>$$

$(\Delta(n)$ – оператор Лапласа на единичной сфере $n_\mu n_\mu=1)$.

Обратное по отношению к (4) преобразование будет иметь вид интеграла

$$\phi(p)=\int_{r>0(r>0)}<p|-r,n>\phi(r,n)d\,\Omega(|\,r\,|,n)$$

с мерой

$$\int d\,\Omega(r,n)=\int d\Omega(n)\sum_r\frac{1}{M}r(r^2-(\frac{1}{2M})^2)$$

Когда $1/M\to0$ и $p_3>0$ («плоской предел») функционал <p/r,n> переходит в обычную плоскую волну $\exp(irp_\mu n_\mu)$ и формулы (5) и (6) принимают обычную форму

$$(i\frac{\partial}{\partial p_\mu})^2e^{irp_\mu n_\mu}=r^2e^{irp_\mu n_\mu},$$

$$-\left[(\frac{\partial}{\partial p})^2+\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\Delta(n)}{r^2}\right]e^{irp_\mu n_\mu}=p^2e^{irp_\mu n_\mu},$$

В новом конфигурационном представлении разложение (4) функции на сфере (1) находится в однозначном соответствии с Фурье анализом плоского пространства. Параметр r и угловые координаты θ_i, единичного вектора играют роль сферических координат евклидова пространства. Поучительно, что если бы мы решили формулировать стандартную евклидову теорию в 4-мерных плоских сферических координатах r, θ_i, а не в декартовых координатах x_μ, то тогда мы должны были бы ввести сферические компоненты вектор-потенциала A_r,A_Θ, и соответствующие компоненты тензора.

В применении к функциям, которые определены в конфигурационном представлении, дифференциально разностный оператор (6) может рассматриваться как аналог евклидового Лапласиана, записанный в терминах r и θ координат. Эта точка зрения подтверждается и предельными свойствами (при $M\to\infty$), и тем фактом, что обратный оператор $\frac{1}{M^2}(2(1-\frac{p_5}{M}))^{-1}$ имеет простой полюс на массовой поверхности $^2p_\mu^2=0$.

Оператор (6) будет важен при построении интеграла действия. В случае ненулевой массы m аналогом оператора Клейна-Гордона p^2+m^2 оказывается выражение $2M^2(\cosh m-\frac{p_5}{M})$, где $\sinh\mu-\frac{m}{M}$. Обратная величина имеет полюс на массовой поверхности $p^2+m^2=0$.

Далее мы вводим поля и предполагаем, что принимает положительные дискретные значения в соответствии с (3).

$$\phi(r,n)\equiv\phi(-r,-n)^*$$

СВОБОДНАЯ СКАЛЯРНАЯ ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ

Мы начинаем с простейшего свободного неэрмитового скалярного мультиплета на сферическом импульсном пространстве, чей производящий функционал имеет вид:

$$Z[j]=\frac{\int D\bar{\phi}D\bar{\phi}e^{-S[\phi,j]}}{\int D\bar{\phi}D\bar{\phi}e^{-S[\phi]}}$$

Действие $S[\Phi]$ обладает вращательной симметрией и инвариантно относительно глобального унитарного преобразования Φ и $\bar{\Phi}$:

$$\begin{aligned}S[\Phi]&=\int d\Omega(p)\,\phi(p)^*2M^2\,(\cosh\,\mu-p_5\frac{1}{M})\phi(p)=\\&=1/2\int d\Omega(r,n)\,\bar{\phi}\left[-_{r,n}+(2M\sinh\,(\frac{\mu}{2}))^2\right]\phi+\textit{эрмит. сопр.}\end{aligned}\qquad(7)$$

Мы положим $g\theta_i=r^2\sum_\mu\left[\frac{\partial\theta_i}{\partial x^\mu}\right]^2$ и введем источники j и $\bar{j}$

$$S[\phi,j]=S[\phi]+\int d\Omega(r,n)(\bar{j}\phi+\bar{\phi}j)\qquad(8)$$

Чтобы рассмотреть плоский предел рассматриваемой модели, мы разделяем поля на компоненты, отвечающие «северному» ($p_5>0$) и «южному» ($p_5<0$) полюсам сферы (1)

$$\phi(p)=\theta(p_5)\phi_1(p)+\theta(-p_5)\phi_2(p)$$

и делаем тоже самое для источников. Таким образом, когда $M \to \infty, S[\Phi]$ преобразуется в интеграл

$$S[\Phi] = \int d^4x(\left|\partial_\mu \phi_1\right|^2 + m^2\left|\phi_1\right|^2 + 2M\left|\phi_2\right|^2)$$

где

$$\phi_{1,2}(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4 p e^{\pm i p_\mu x_\mu} \phi_{1,2}(p)$$

Поэтому функция $Z[j]$ не зависит от источников, заданных на «южной» половине сферы (1), и становится производящим функционалом свободного евклидового скалярного поля.

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Калибровочные преобразование полей материи, локальных в КП, можно определить стандартным образом:

$$\phi'(r,n) = U(r,n)\phi(r,n)$$

где $U(r,n) = \exp(ig\omega_k(r,n)T^k)$ есть элемент полупростой компактной группы Ли, g калибровочная константа связи. Мы накладываем лишь дополнительное условие

$$U(-r,-n) = U(r,n)$$

для получения правильного предела при $M \to \infty$.

Соответствующий закон преобразования для калибровочных компонент A_r и $A_{\theta i}$ имеет вид

$$e^{igA(r,n)'} = U(r,n)\, e^{igA(r,n)}\, U(r+1,n)^{-1} \tag{11}$$

$$A_{\theta i}(r,n)' = U(r,n)\,(A_{\theta i}(r,n) + \frac{i}{g}\frac{\partial}{\partial\theta})U(e,n)^{-1} \tag{12}$$

Формула (10) означает, что

$$A_{\mu i}(r,n) = -A_r(-r-1,-n),$$

$$A_{\theta i}(r,n) = \frac{\partial\theta_i(-n)}{\partial\theta_i(n)} A_\theta(-r,-n)$$

В этих уравнениях A_r и $A_{\theta i}$ есть элементы алгебры Ли в соответствующем представлении. Первое преобразование (11) напоминает преобразование калибровочного векторного поля на кубической решетке с шагом $\frac{1}{M}$. Когда $\frac{1}{M} \to 0$, оно принимает вид (12).

В абелевом случае можно также ввести следующие компоненты векторного поля

$$A_\mu(r,n) = n_\mu \frac{r-3/2}{2r}(e\frac{\partial}{\partial r}+1)A_r(r,-n) +$$
$$+\left(\frac{\partial\theta_k}{\partial x_\mu}(r-1/2,n) - \frac{n_\mu}{r(2r-1)s_3^2 s_2}\frac{\partial}{\partial\theta_k} g\theta_k s_3^2 s_2\right)A_{\theta k}(r+1,n)$$

В итоге в ИП возникает обычное правило калибровочного преобразования для $A_\mu(p)$;

$$A_\mu(p)' = A_\mu(p) + ip_\mu\omega(p),$$

Преобразования (9), (11), (12) есть исходный пункт для построения калибровочно – инвариантной теории со сферическим импульсным пространством. Для этой цели необходимо перейти в новом кинетическом члене, являющимся дифференциально – разностным оператором (6), к ковариантным производным:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i} \to D_{\theta_i} \equiv \frac{\partial}{\partial\theta_i} + igA_{\theta_i}(r,n)$$

$$e^{\frac{\partial}{\partial r}} - 1 \to \Delta \equiv e^{igA_r(r,n)} e^{\frac{\partial}{\partial r}} - 1$$

Для простоты рассмотрим в дальнейшем только скалярную электродинамику.

КАЛИБРОВОЧНО – ИНВАРИАНТНАЯ СКАЛЯРНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

В качестве функционала действия поля заряженной скалярной частицы, взаимодействующей с внешним калибровочным векторным полем, возьмем интеграл

$$S[\phi, A] = \frac{1}{2}\int d\Omega(r,n)\cdot[\frac{r+\frac{3}{2}}{r}\Delta\cdot\bar{\phi}\Delta\phi + \frac{g_{\theta_i}}{r\left(r-\frac{1}{2}\right)} D^*_{\theta_i}\phi(r,n)e^{igA_\mu(r,n)} \times$$
$$\times D_{\theta_i}\phi(r+1,n) + \left(2\sinh\left(\frac{\mu}{2}\right)\right)^2 \bar{\phi}\phi + \frac{\lambda}{4!}(\bar{\phi}\phi)^2 + \text{эрмит. сопр.}] \tag{13}$$

Этот функционал вращательно и калибровочно инвариантен. В отсутствии векторного поля и самодействия он совпадает с $S[\phi]$.

С другой стороны, аналог максвелловского действия имеет вид:

$$S[A] = \int d\Omega(r,n)(r(r+\frac{1}{2}))^{-1}[(2r-1)\times g_{\theta_i} F_{\theta_i,r}(r,n)^2 + \frac{g_{\theta_i} g_{\theta_k}}{(1-1/2)} F_{\theta_i,\theta_k}(r+1,n)^2] \tag{14}$$

Здесь мы использовали калибровочно инвариантные величины

$$F_{\theta_i,r}(r,n) = A_r(r,n) - (A_{\theta_i}(r+1,n) - A_{\theta_i}(r,n))$$

$$F_{\theta_i,\theta_k} = \frac{\partial}{\partial_{\theta_i}} A_{\theta_k}(r,n) - \frac{\partial}{\partial_{\theta_k}} A_{\theta_i}(r,n)$$

которые при $\frac{1}{M} \to 0$ переходят в сферические компоненты тензора поля в -мерном евклидовом пространстве.

Интеграл $S[A]$ обладает вращательной и калибровочной симметрией и является неотрицательными. Если мы введем декартовы компоненты действительного калибровочно инвариантного векторного поля $\hat{A}_\mu$, построенного, как и A_{μ}, из первоначальных компоненты A_r и A_{θ_i}, тогда уравнение (14) принимает в ИП вид аналогичный (7):

$$S[A] = \frac{1}{2}\int d\Omega_p \hat{A}_\mu(p)^* 2(1-p_5)\hat{A}_\mu(p),$$

$$\hat{A}_\mu(p)^* = \hat{A}_\mu(-p)$$

Используя точное выражение для можно показать, что этот вектор есть аналог поперечной компоненты вектор – потенциала и подчиняется некоторому дифференциально – разностному условию в конфигурационном представления.

Производящий функционал этой модели может быть теперь определен следующим образом:

$$Z\left[j,\, j_n\right]=\frac{\int D\bar{\phi}\, D\phi DA_r DA_\theta e^{-S_t\left[\phi,\, A,\, j,\, j_\mu\right]}}{\int D\bar{\phi}\, D\phi DA_r DA_\theta e^{-S_t\left[\phi,\, A\right]}} \tag{15}$$

с полным действием

$$S_t\left[\phi,\, A\right]=S\left[A\right]+S\left[\phi,\, A\right],$$

где скалярные и векторные полевые источниками введены так же, как и в (8).

Следует отметить, что мы не фиксировали калибровку в (15).

Специальным калибровочным преобразованием можно добиться, чтобы A_r в S_t принимало определенное значение, и затем провести интегрирование по мере DA_r. Это мера, так же как в подходе Вильсона к калибровочным теориям на решетке, является мерой на компактной U(1) группе.

Мы можем провести тот же анализ, что и в модели свободного скалярного поля, и показать, что в плоском пределе Z не зависит от источников полевых переменных, определенных на «южной» половине сфере (1), и соответствует производящему функционалу евклидовой скалярной электродинамики в калибровке с фиксированной радиальной компонентой .

Намеченный подход может быт принят теперь как основа дальнейшего развития радиальной решеточной теории с обобщением на случай Янга-Миллса и спинорных материальных полей.

В заключение, что в теории с дискретным радиусом, но непрерывными угловыми координатаии, основанной на замене плоского импульсного пространства в евклидовой формулировке теории на сферическое с конечным радиусом М, согласуется с принципом калибровочной инвариантности и не приводит к нарушению вращательной симметрии.

При этом правило калибровочного преобразования существенно модифицируется, превращаясь в комбинацию стандартных преобразований Янга-Миллса и преобразований характерных для теории поля на кубической решетке с шагом $\frac{1}{M}$.