УДК 517.9

И. О. ОРАЗОВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им.М.Ауезова,
Шымкент,Республика Казахстан)

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Аннотация. Бұл еңбекте аргументі ауытқыған бірінші ретті дербес туындылы теңдеу ушін Дирихле есебі қарастырылды.

Ключевые слова: оператор Штурм-Лиувилля,собственные функций,присоединенные функций.
Тірек сөздер: Штурм-Лиувиллдің операторы, меншікті функциялар, қосарлас функциялар.
Keywords: the operator of Sturm-Liuvillay,own functions,attached functions.

Постановка задачи. Пусть $D-$ область состоящая из верхней полуполосы $D^+=\{x=-\pi, x=\pi, y\geq 0\}$ и из нижнего треугольника $D^-=\Delta ABC$, где $A=A(-\pi,0)$, $B=B(\pi,0)$, $C=C(0,-\pi)$.

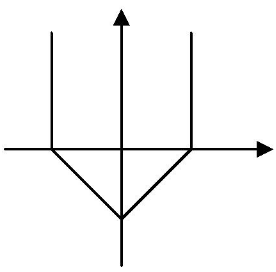

Рисунок 1

Рассмотрим в этой области $D=D^+\cup D^-$ задачу Дирихле; Найти дважды непрерывно дифференцируемую в области D и непрерывно дифференцируемую в $\overline{D}$ решение уравнения

$$u_x(x,y)+\sqrt{sqny}u_y(-x,y)=0 \tag{1}$$

удовлетворяющего следующую условию Дирихле

$$u|_{x=-\pi}=0 \tag{2}$$

$$u|_{AC}=f(x),\quad u|_{BC}=q(x), \tag{3}$$

$$u(x,y)\Rightarrow 0 \quad \text{равномерно при } y\to+\infty \tag{4}$$

где функций $f(x),q(x)-$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют дополнительных условии,

$$f(-\pi)=0,\quad f'(0)+q'(\pi)=0 \tag{5}$$

Полученныеы результаты. Если $y\geq 0$, то уравнение (1) примет вид

$$u_x(x,y)+u_y(-x,y)=0 \tag{6}$$

Тогда полагая $v(x,y)=u(-x,y)$ имеем $v_x=-u_x(-x,y)$, $v_y=u_y(-x,y)$, $u_x+v_y=0$; заменив

x на $-x$ в уравнении (6) получим $u_x(-x,y)+u_y(x,y)=0$ или $-v_x+u_y=0$. В итоге мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} u_x+v_y=0, \\ -v_x+u_y=0 \end{cases}$$

где $v(x,y)=u(-x,y)$. Исключив из этой системы уравнений неизвестную $v(x,y)$ получим уравнение Лапласа

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (7)$$

для неизвестной функций $u(x,y)$.

Если $y \prec 0$, то аналогичные вычисления показывают, что функция $u(x,y)$ является решением волнового уравнения:

$y \prec 0$, $u_x(x,y)+iu_y(-x,y)=0$, $v=u(-x,y)$, $v_x=-u_x(-x,y)$, $v_y=u_y(-x,y)$, $u_x+iv_y=0$;

$u_x(-x,y)+iu_y(x,y)=0$, $-v_x+iu_y=0$, $-v_x+iu_y=0$, $u_{xx}+iv_{yx}=0$, $-v_{xy}+iu_{yy}=0$, $u_{xx}-u_{yy}=0$.

Таким образом уравнение при $y \prec 0$ уравнение (1) примет вид волнового уравнения

$$u_{xx}-u_{yy}=0 \qquad (8)$$

Внутри характеристического треугольника ΔABC функция $u(x,y)$ является решением задачи Гурса для волнового уравнения. Так как общее решение уравнения (8) имеет вид

$$u(x,y)=\varphi(x+y)+\psi(x-y) \qquad (9)$$

то из уравнения (3) имеем

$$\varphi(-\pi)+\psi[x-(-x-\pi)]=f(x),$$
$$\varphi(x+x-\pi)+\psi(\pi)=q(x)$$

или

$$\varphi(-\pi)+\psi(2x+\pi)=f(x)$$
$$\varphi(2x-\pi)+\psi(\pi)=q(x)$$

Отсюда полагая $2x+\pi=\xi$, $2x-\pi=\eta$, получим

$$x=\frac{\xi-\pi}{2}, \quad x=\frac{\eta+\pi}{2}.$$

и

$$\varphi(-\pi)+\psi(\xi)=f\left(\frac{\xi-\pi}{2}\right),$$

$$\varphi(\eta)+\psi(\pi)=q\left(\frac{\eta+\pi}{2}\right)$$

Тогда

$$\psi(\xi)=f\left(\frac{\xi-\pi}{2}\right)-\varphi(-\pi),$$

$$\varphi(\eta)=q\left(\frac{\eta+\pi}{2}\right)-\psi(\pi)$$

При $\xi=\pi$ имеем $\psi(\pi)=f(0)-\varphi(-\pi)$, $\psi(\pi)+\varphi(-\pi)=f(0)=q(0)$

Следовательно, решением задачи Гурса будет функция

$$u(x,y)=q\left(\frac{x+y+\pi}{2}\right)+f\left(\frac{x-y-\pi}{2}\right)-\varphi(-\pi)-\psi(\pi)=q\left(\frac{x+y+\pi}{2}\right)+f\left(\frac{x-y-\pi}{2}\right)-q(0).$$

Переходя к пределу при $y\to 0$ получим граничное условие для верхней части нашей задачи

$$u\Big|_{y=0}=q\left(\frac{x+\pi}{2}\right)+f\left(\frac{x-\pi}{2}\right)-q(0) \qquad (10)$$

Полагая $x=-\pi$ в этом равенстве и учитывая условие (2) имеем

$$q(0)+f(-\pi)-q(0)=f(-\pi)=0$$

Теперь найдем условия согласование в точке B. Продифференцировав равенство (8) по x и положив $x=\pi$ получим

$$\left[\frac{1}{2}q'\left(\frac{x+\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{x-\pi}{2}\right)\right]_{x=\pi}=\frac{1}{2}\left[q'(\pi)+f'(0)\right]=0$$

Следовательно, $q'(\pi)+f'(0)=0$.

В верхней части области D наша уравнение совпадает с уравнением Лапласа и задача принимает вид задачи Дирихле для полубесконечной полосы:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{x=-\pi}=u_x\Big|_{x=\pi}&=0,\\ u\Big|_{AB}=q\left(\frac{x+\pi}{2}\right)+f\left(\frac{x-\pi}{2}\right)&-q(0),\\ \lim_{y\to+\infty}u&=0\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

равномерно относительно x.

Для решения этой задачи воспользуемся первоначальным уравнением (1).

При $y\geq 0$ уравнение (1) примет вид

$$u_x(x,y)+u_y(-x,y)=0 \qquad (13)$$

Полагая $u(x,y)=v(x)\cdot w(y)$ имеем

$$v_x\cdot w(y)+v(-x)\cdot w_y=0$$

$$\frac{v_x}{v(-x)}+\frac{w_y}{w(y)}=0$$

Пусть $\frac{v_x}{v(-x)}=\lambda$, $\frac{w_y}{w(y)}=-\lambda$, тогда

$$w(y)=A(\lambda)\cdot e^{-\lambda y} \qquad (14)$$

а для функции v_x получим спектральную задачу:

$$\begin{cases} v_x=\lambda v(-x),\\ v(-\pi)=0\end{cases} \qquad (15)$$

Продифференцировав это уравнение имеем

$$v_{xx}=-\lambda\cdot v_x(-x)=-\lambda\cdot\lambda\cdot v(x)=-\lambda^2 v(x).$$

Следовательно, спектральная задача (15) сводится к неклассической задаче Штурма-Лиувилля

$$-v_{xx}=\lambda^2 v \qquad (16)$$

$$v(-\pi) = 0 = v_x(\pi) \tag{17}$$

$$v_x = \lambda \cdot v(-x) \tag{18}$$

От обычной задачи Штурма-Лиувилля эта задача отличается наличием дополнительного условия (18).

Общее решение уравнения (16) имеет вид

$$v(x) = A(\lambda)\cos \lambda x + B(\lambda)\sin \lambda x \tag{19}$$

Коэффициентов $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ находим с помощью условии (17), (18). Продифференцировав полученное решение и подставив в (18) имеем

$$v_x^{/} = -A(\lambda)\lambda \sin \lambda x + \lambda B(\lambda)\cos \lambda x = \lambda A(\lambda)\cos \lambda x - \lambda B(\lambda)\sin \lambda x$$

$$[\lambda B(\lambda) - \lambda A(\lambda)]\cdot \cos \lambda x + [\lambda B(\lambda) - \lambda A(\lambda)]\cdot \sin \lambda x = 0,$$

$$\lambda[B(\lambda) - A(\lambda)]\cdot [\cos \lambda x + \sin \lambda x] = 0 \cdot$$

Так как $\cos \lambda x + \sin \lambda x \neq 0$, то

$$\lambda[B(\lambda) - A(\lambda)] = 0 \cdot$$

Отсюда либо $\lambda = 0$, либо $B(\lambda) - A(\lambda) = 0$. Если $\lambda = 0$, то $v_{xx} = 0$ и $v(x) = ax + b$, где $a, b -$ произвольные постоянные. Тогда из граничного условия (17) получим $a = 0$, $b = 0$ т.е. $v(x) \equiv 0$. Следовательно, значение $\lambda = 0$ не является собственным значением нашей задачи. Таким образом

$$B(\lambda) = A(\lambda) \tag{20}$$

при $\lambda \neq 0$ и $A(0) = B(0) = 0$ при $\lambda = 0$.

С учетом условия (20) наше решение принимает вид

$$v(x,\lambda) = A(\lambda)[\cos \lambda x + \sin \lambda x] \tag{21}$$

Подставив (21) в граничное условие (17) имеем

$$\left.\begin{aligned} v(-\pi) &= A(\lambda)[\cos \lambda\pi - \sin \lambda\pi] = 0, \\ v_x(\pi) &= \lambda A(\lambda)[-\sin \lambda\pi + \cos \lambda\pi] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Из этих равенств видно, что второе условие равенств (17) выполняется автоматически. Поэтому это условие можно снять. Из (22) видно, что $tg\lambda\pi = 1$, $\lambda_n \pi = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$,

$$\lambda_n = n + \frac{1}{4},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Таким образом собственными значениями и собственными функциями задачи (15) являются

$$\lambda_n = n + \frac{1}{4},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$v_n(x) = A_n \cdot (\cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x)$$

Коэффициентов A_n находим из условия нормировки:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} v_n^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} A_n^2 (\cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} A_n^2 (1 + 2\sin \lambda_n x \cdot \cos \lambda_n x)dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_n^2 (1 + \sin 2\lambda_n x)dx = A_n^2 \cdot 2\pi - \left.\frac{\cos 2\lambda_n x}{2\lambda_n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \cdot A_n^2, \quad A_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Решение нашей задачи ищем в виде

$$v(x,y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n e^{-\lambda_n y} v_n(x).$$

Если учтем условия убывания, то должны полагать, что $B_n = 0$ при $n \prec 0$. Тогда

$$u(x,\lambda) = \sum_{0}^{+\infty} e^{-\lambda_n y} v_n(x),$$

но функции $\{v_n(x)\}$ – могут оказаться неполной в $L_2(-\pi,\pi)$, поэтому сохраним все члены ряда.

Таким образом решение задачи ищем в виде

$$u(x,y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \cdot \frac{\left[\cos\left(n+\frac{1}{4}\right)x + \sin\left(n+\frac{1}{4}\right)x\right]}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(n+\frac{1}{4}\right)y}$$

Из начального условия на AB имеем

$$q\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + f\left(\frac{x-\pi}{2}\right) - q(0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_n}{\sqrt{2\pi}}\left[\cos\left(n+\frac{1}{4}\right)x + \sin\left(n+\frac{1}{4}\right)x\right],$$

следовательно,

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[q\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + f\left(\frac{x-\pi}{2}\right) - q(0)\right] \cdot \left[\cos\left(n+\frac{1}{4}\right)x + \sin\left(n+\frac{1}{4}\right)x\right] dx.$$

Для сходимости полученного ряда достаточно, чтобы

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |A_n| e^{-\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi} + \sum_{0}^{+\infty} |A_n| \prec +\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Наймарк М.А.Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. – 529 с.

2 Марченко В.А: Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Науква думка, 1977. – 329 с.

3 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспогнент. М.: Наука, 1983. – 176 с.

4 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени.// Известия АН РК, серия физ.-мат. 2000. № 3. С.29-34.

References

1 Naimark M.A. Lineinye differencial'nye operatory. M.: Nauka, 1969. – 528 (in Russ.).

2 Marchenko V.A. Operatory Sturma-Liuvillya I ih prilozhenya. Kiev: Nauka dumka, 1977. – 332 (in Russ.).

3 Leont'ev A.Ph. Celye funkcii. Ryady exponent. M.: Nauka, 1983, – 17 (in Russ.).

4 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O structure spectra kraevoi zadachi Shturma-Liuvillya na konechnom otrezke vremeni // Izvestya AN RK, serya phis.-math. 2000. № 3, 29-34(in Russ.).

Резюме

В данной работе исследована задача Дирихле для уравнения первого порядка с частными производными и отклонящимся аргументом.

Поступила 2014 г.