N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 300 (2015), 41 – 43

BOUNDARY CONDITIONS OF THE ONE VOLUME POTENTIAL IN MULTIDIMENSIONAL BALL

B. T. Torebek[1,2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan,
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan. E-mail: turebekb85@mail.ru

Key words: green's function, Poisson equation, fundamental solution, boundary conditions.

Abstract. In this paper in the multi-dimensional unit ball is considered one volume potential. Found the boundary conditions studied of volume potential. It is proved that the considered volume potential is a solution of a special Robin problem for the Poisson equation.

УДК 517.956.225

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОГО ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА В МНОГОМЕРНОМ ШАРЕ

Б. Т. Торебек[1,2]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,
[2]КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: функция Грина, уравнение Пуассона, фундаментальное решение, граничные условия.

Аннотация. В настоящей работе в многомерном единичном шаре рассматривается один объемный потенциал. Ядро данного потенциала является некоторая функция Грина. Найдены граничные условия исследуемого потенциала. Доказано, что рассматриваемый объемный потенциал является решением специальной задачи Робена для уравнения Пуассона.

1. Введение. Пусть $\Omega=\{x\in R^n:|x|<1\}$ - единичный шар, $n\geq 2$, $\partial\Omega=\{x\in R^n:|x|=1\}$ – единичная сфера и $\omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ - площадь $\partial\Omega$ в R^n. Пусть f - достаточно гладкая функция в Ω. В области Ω рассмотрим функцию

$$u(x)=\int_\Omega G(x,y)f(y)dy, \tag{1}$$

где - $G(x,y)$ имеет вид

$$G(x,y)=\varepsilon_n(x-y)+\varepsilon_n\left(x|y|-\frac{y}{|y|}\right), \tag{2}$$

здесь $\varepsilon_n(x-y)$ - фундаментальное решение оператора Лапласа (см.[1]):

$$\varepsilon_n(x-y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|}, n=2;\\ \dfrac{1}{\omega_n(n-2)}|x-y|^{2-n}, n\geq 3.\end{cases} \tag{3}$$

Так как функция $\varepsilon_n\left(x|y|-\frac{y}{|y|}\right)$ - гармоническая в Ω, то функция (2) удовлетворяет уравнению

$$-\Delta G(x,y)=\delta(x-y),(x,y)\in\Omega,$$

где $\delta(x-y)$ - дельта-функция Дирака. Тогда функция (1) будет решением уравнения

$$-\Delta u(x)=f(x),x\in\Omega. \tag{4}$$

Известно, что в двумерном круге функция (2) совпадает с функцией Грина задачи Неймана для уравнения (4). Для случая $n\geq 3$ неизвестно, какими свойствами обладает функция (2). Даже при $n=3$ функция (2) не удовлетворяет условию Неймана.

Цель настоящей работы - найти граничные условия, которым удовлетворяет функция (1) при $n\geq 3$.

Отметим, что в работах [2, 3] были найдены граничные условия объемного потенциала для эллиптических уравнений. При этом в качестве ядра объемного потенциала выбиралось гласное фундаментальное решение (3).

Основным результатом нашей работы является

Теорема. *Пусть* $f(x)\in L_2(\Omega)$ *и* $u(x)\in W_2^2(\Omega)$. *Тогда функция (1) является решением уравнения (4) и на* $\partial\Omega$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x)+\frac{n-2}{2}u(x)=0,\ x\in\partial\Omega, \tag{7}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_x}$ *– производная по направлению внешней нормали к* $\partial\Omega$ *по* x.*Верно и обратное утверждение: задача для уравнения (4) с краевым условием (7) имеет единственное решение и это решение дается объемным потенциалом (1).*

Доказательство. Рассмотрим функцию (1). Подставляя (4) в (1) и применяя вторую формулу Грина

$$\int_\Omega(v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v)dy=\int_{\partial\Omega}\left(v\cdot\frac{\partial}{\partial n_y}u-u\cdot\frac{\partial}{\partial n_y}v\right)dS_y$$

получим

$$u(x)=\int_\Omega G(x,y)\Delta u(y)dy=\int_\Omega\Delta G(x,y)u(y)dy+\int_{\partial\Omega}\left(G(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}u(y)-u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)\right)dS_y=$$

$$+u(x)+\int_{\partial\Omega}\left(G(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}u(y)-u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)\right)dS_y.$$

Тогда

$$\int_{\partial\Omega}\left(G(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}u(y)-u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)\right)dS_y=0.$$

Отсюда в силу (2) имеем

$$\int_{\partial\Omega}\left(2\varepsilon_n(x-y)\frac{\partial}{\partial n_y}u(y)-u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)\right)dS_y=0. \tag{8}$$

Теперь вычислим нормальную производную функции (2) по y. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)=\frac{\partial}{\partial n_y}\varepsilon_n(x-y)+\frac{\partial}{\partial n_y}\varepsilon_n\left(x|y|-\frac{y}{|y|}\right)=\frac{\partial}{\partial n_y}\left[\left(|x|^2-2(x,y)+|y|^2\right)^{\frac{2-n}{2}}+\left(|x|^2|y|^2-2(x,y)+1\right)^{\frac{2-n}{2}}\right]=$$

$$=\frac{2-n}{2}\left[\left(2|y|-2(x,y)\right)\left(|x|^2-2(x,y)+|y|^2\right)^{-\frac{n}{2}}+\left(2|x|^2|y|-2(x,y)\right)\left(|x|^2|y|^2-2(x,y)+1\right)^{-\frac{n}{2}}\right].$$

Отсюда переходя к пределу при $y \to \partial\Omega$, получим

$$\frac{\partial}{\partial n_y} G(x,y) = \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_n (x-y) + \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_n \left(x|y| - \frac{y}{|y|} \right) =$$

$$= (2-n)\left(1 - 2(x,y) + |x|^2\right)\left(|x|^2 - 2(x,y) + 1\right)^{-\frac{n}{2}} = (2-n)\left(|x|^2 - 2(x,y) + 1\right)^{\frac{2-n}{2}} = (2-n)\varepsilon_n (x-y).$$

Подставляя полученные результаты в (8), имеем

$$\int_{\partial\Omega} \left(2\varepsilon_n (x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - (2-n) u(y) \varepsilon_n (x-y) \right) dS_y = 2 \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n (x-y) \left(\frac{\partial}{\partial n_y} u(y) + \frac{n-2}{2} u(y) \right) dS_y = 0.$$

Отсюда получим граничное условие (7).

Доказательство обратного результата следует из единственности решения задачи Робена (7). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования Комитета науки МОН РК по проекту № 0570/ГФ3.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations. Graduate studies in Mathematics. American Math. Society, V.19, 1998. 668p.

[2] Кальменов Т. Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады РАН. 2009. Т. 428. №1. С.16-19.

[3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials // Oper. Theory Adv. Appl. 2011. V. 216. P.187-210.

[4] Кальменов Т. Ш., Сураган Д. Граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения //Дифференц. уравнения. 2012. Т.48. №4. С.595-599.

REFERENCES

[1] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations. Graduate studies in Mathematics. American Math. Society, V.19, 1998. 668p. (in Eng.).

[2] Kalmenov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential. Doklady Mathematics. 2009. V. 80. № 2. P.646-649. (in Eng.).

[3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials. Oper. Theory Adv. Appl. 2011. V. 216. P.187-210. (in Eng.).

[4] Kalmenov T. Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation. Differential Equations. 2012. V. 48. № 4. P. 604-608. (in Eng.).

КӨПӨЛШЕМДІ ШАРДАҒЫ БІР КӨЛЕМДІК ПОТЕНЦИАЛДЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТЫ

Төребек Б. Т.

Тірек сөздер: Грин функциясы, Пуассон теңдеуі, фундаментал шешім, шекаралық шарт.

Аннотация. Жұмыста көпөлшемді бірлік шарда бір көлемдік потенциал қарастырылады. Берілген потенциалдың ядросы қандайда бір Грин функциясы болып табылады. Зерттелінетін потенциалдың шекаралық шарттары анықталады. Қарастырылып отырған көлемдік потенциал Пуассон теңдеуі үшін Робен арнайы есебінің шешімі болатындығы дәлелденеді.

Поступила 11.03.2015г.