N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 301 (2015), 5 – 14

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF A NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

A. T. Asanova

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the MES RK, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: anarasanova@list.ru

Key words: hyperbolic, condition, integral, solvability, algorithm.

Abstract. The nonlocal boundary value problem with integral conditions for system of hyperbolic equations of the second order is considered. The questions of the existence of unique solution of the considering problem and ways of its construction are investigated. For the solve of nonlocal problem with integral conditions for system of hyperbolic equations of the second order a method of a introducing additional functional parameters is applied. We introduce a new unknown function as the values of the desired solution on the characteristics. The desired solution of nonlocal problem with integral conditions for system of the hyperbolic equations is replaced by the sum of the new unknown function and the introduced functional parameters. The consider nonlocal problem with integral conditions is reduced to an equivalent problem consisting of a Goursat problem for the system of hyperbolic equations with functional parameters and functional relations. The algorithms of finding solution to setting equivalent problem on the characteristics with functional parameters are proposed. The feasibility and convergence of the constructed algorithm are proved in the terms of the data to problem. Sufficient coefficient conditions of the unique solvability to the equivalent problem on the characteristics with functional parameters are established. Theorem of the existence unique classical solution to the nonlocal problem with integral conditions for system of hyperbolic equations of the second order is proved.

УДК 517.958:52/59

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Т. Асанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: гиперболическое, условие, интегральное, разрешимость, алгоритм.

Аннотация. Рассматривается нелокальная краевая задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений второго порядка. Исследуются вопросы существования единственного решения рассматриваемой задачи и способы его построения. Для решения нелокальной краевой задачи с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений второго порядка применяется метод введения дополнительных функциональных параметров. Вводятся новые неизвестные функции как значения искомого решения на характеристиках. Искомое решение нелокальной краевой задачи с интегральными условиями

для системы гиперболических уравнений заменяется на сумму новой неизвестной функции и введенных функциональных параметров. Рассматриваемая нелокальная задача с интегральными условиями сводится к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для системы гиперболических уравнений с функциональными параметрами и функциональным соотношениям. Предложены алгоритмы нахождения решения полученной эквивалентной задачи на характеристиках с функциональными параметрами. Доказана осуществимость и сходимость построенного алгоритма в терминах данных задачи. Установлены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости эквивалентной задачи на характеристиках с функциональными параметрами. Доказана теорема о существовании единственного классического решения нелокальной краевой задачи с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений второго порядка.

Рассматривается нелокальная краевая задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений второго порядка в области $\Omega = [0,T]\times[0,\omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$\int_0^a K(t,\xi)u(t,\xi)d\xi = \psi(t),\ t\in[0,T], \tag{2}$$

$$\int_0^b K(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = \varphi(x),\ x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где $(n\times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, n- вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω, $(n\times n)$-матрица $K(t,x)$ непрерывно дифференцируема на Ω по обеим переменным, n- вектор-функции $\psi(t)$, $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$, $[0,\omega]$, соответственно. Предполагается, что функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют соотношению $\int_0^a \varphi(\xi)d\xi = \int_0^b \psi(\tau)d\tau$.

Пусть $C(\Omega,R^n)$ - пространство функций $u:\Omega\to R^n$, непрерывных на Ω, с нормой $\|u\|_0 = \max\limits_{(t,x)\in\Omega}\|u(t,x)\|$, $\|u(t,x)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|$.

Функция $u(t,x)\in C(\Omega,R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,R^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,R^n)$ называется классическим решением задачи (1) - (3), если она удовлетворяет системе уравнений (1) и интегральным условиям (2), (3).

Нелокальные задачи с интегральными условиями возникают при математическом моделировании различных физических явлений, например, процессов распространения тепла [1-3], физики плазмы [4], технологии очистки кремния [5], влагопереноса в капиллярно-пористых средах [6-8] и др. Использование интегральных соотношений вместо краевых условий на искомое решение соответствующего дифференциального уравнения оказалось достаточно удобным аппаратом математического исследования. Систематическое изучение нелокальных краевых задач, в которых вместо классических краевых условий задается связь между значениями искомой функции на границе области и внутри нее, проведено в [9]. Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений начали изучаться относительно недавно, некоторые классы задач и библиографию можно посмотреть в [10-21]. С помощью различных методов были получены условия классической, обобщенной разрешимости задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений. Задача (1)-(3) для одномерного случая при $a=\omega$, $b=T$ исследовалась в работе [19]. Выяснены условия разрешимости рассматриваемой задачи при предположении непрерывной дифференцируемости коэффициентов $A(t,x)$, $B(t,x)$.

В работах [22, 23] рассматривалась нелокальная краевая задача с интегральным условием по временной переменной для системы гиперболических уравнений со смешанной производной.

Установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных и предложены алгоритмы его нахождения.

Отметим, что при исследовании задач с интегральными условиями дя гиперболических уравнений возникают ряд трудностей, связанных с изучением сопряженной задачи и построением функции Римана. Одним из путей преодоления этих трудностей является сведение их к обычным нелокальным условиям. Однако, это не всегда удается сделать на основе классических методов.

В настоящей работе нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений на основе метода введения функциональных параметров [24, 25] сведена к задаче Гурса для системы гиперболических уравнений с параметрами и функциональным соотношениям. Получены условия существования единственного классического решения изучаемой задачи в терминах исходных данных. Предложен алгоритм построения приближенных решений и доказана его сходимость. Относительно коэффициентов системы гиперболических уравнений (1) предполагается только непрерывность в области Ω. Указанный метод ранее был применен к частному случаю задачи (1)-(3), при $K(t,x)=I$, где I - единичная матрица размерности n в работе [26].

Схема метода введения функциональных параметров.

Введем обозначения $\lambda(x)=u(0,x)-\frac{1}{2}u(0,0)$, $\mu(t)=u(t,0)-\frac{1}{2}u(0,0)$. В задаче (1)-(3) осуществим замену искомой функции $u(t,x)$: $u(t,x)=\tilde{u}(t,x)+\lambda(x)+\mu(t)$ и перейдем к следующей задаче

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+C(t,x)\tilde{u}+f(t,x)$$

$$+A(t,x)\lambda'(x)+B(t,x)\dot{\mu}(t)+C(t,x)\lambda(x)+C(t,x)\mu(t), \tag{4}$$

$$\tilde{u}(t,0)=0,\ t\in[0,T], \tag{5}$$

$$\tilde{u}(0,x)=0,\ x\in[0,\omega], \tag{6}$$

$$\int_0^a K(t,\xi)\tilde{u}(t,\xi)d\xi+\int_0^a K(t,\xi)\lambda(\xi)d\xi+\int_0^a K(t,\xi)d\xi\cdot\mu(t)=\psi(t),\ t\in[0,T], \tag{7}$$

$$\int_0^b K(\tau,x)\tilde{u}(\tau,x)d\tau+\int_0^b K(\tau,x)d\tau\cdot\lambda(x)+\int_0^b K(\tau,x)\mu(\tau)d\tau=\varphi(x),\ x\in[0,\omega], \tag{8}$$

Решением задачи (4)-(8) является тройка функций $(\mu(t),\lambda(x),\tilde{u}(t,x))$, где функция $\tilde{u}(t,x)$ имеет непрерывные производные первого порядка и смешанную производную второго порядка на Ω, функция $\mu(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, функция $\lambda(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$, удовлетворяющая системе уравнений (4) условиям (5)-(8).

Задача (4) - (6) при фиксированных $\lambda(x)$, $\mu(t)$ является задачей Гурса относительно функции $\tilde{u}(t,x)$ в области Ω. А соотношения (7), (8) позволяют определить неизвестные параметры $\lambda(x)$, $\mu(t)$, где функции $\lambda(x)$, $\mu(t)$ удовлетворяют равенству $\lambda(0)=\mu(0)$.

Введем новые неизвестные функции $\tilde{v}(t,x)=\frac{\partial\tilde{u}(t,x)}{\partial x}$, $\tilde{w}(t,x)=\frac{\partial\tilde{u}(t,x)}{\partial t}$ и запишем ее решение в виде системы трех интегральных уравнений

$$\tilde{v}(t,x)=\int_0^t\{A(\tau,x)\tilde{v}(t,x)+B(\tau,x)\tilde{w}(t,x)+C(\tau,x)\tilde{u}(t,x)+f(\tau,x)+$$

$$+A(\tau,x)\lambda'(x)+B(\tau,x)\dot{\mu}(\tau)+C(\tau,x)\lambda(x)+C(\tau,x)\mu(\tau)\}d\tau, \tag{9}$$

$$\widetilde{w}(t,x)=\int_0^x\{A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi)+B(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi)+C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi)+f(t,\xi)+$$

$$+A(t,\xi)\lambda'(\xi)+B(t,\xi)\dot{\mu}(t)+C(t,\xi)\lambda(\xi)+C(t,\xi)\mu(t)\}d\xi\,, \qquad (10)$$

$$\widetilde{u}(t,x)=\int_0^t\widetilde{w}(\tau,x)d\tau\,. \qquad (11)$$

Предположим, что матрица $K_1(t)=\int_0^a K(t,\xi)d\xi$ обратима для всех $t\in[0,T]$, а матрица $K_2(x)=\int_0^b K(\tau,x)d\tau$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$.

Тогда из соотношений (7), (8) находим

$$\mu(t)=[K_1(t)]^{-1}\psi(t)-[K_1(t)]^{-1}\int_0^a K(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi)d\xi-[K_1(t)]^{-1}\int_0^a K(t,\xi)\lambda(\xi)d\xi\,,\ t\in[0,T], \qquad (12)$$

$$\lambda(x)=[K_2(x)]^{-1}\varphi(x)-[K_2(x)]^{-1}\int_0^b K(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)d\tau-[K_2(x)]^{-1}\int_0^b K(\tau,x)\mu(\tau)d\tau\,,x\in[0,\omega], \qquad (13)$$

Продифференцировав соотношение (7) по t, а соотношение (8) – по x и учитывая обозначения, получим

$$\dot{\mu}(t)=-[K_1(t)]^{-1}\int_0^a\frac{\partial K(t,\xi)}{\partial t}d\xi\cdot\mu(t)-[K_1(t)]^{-1}\int_0^a\frac{\partial K(t,\xi)}{\partial t}\lambda(\xi)d\xi-$$

$$-[K_1(t)]^{-1}\int_0^a\frac{\partial K(t,\xi)}{\partial t}\widetilde{u}(t,\xi)d\xi-[K_1(t)]^{-1}\int_0^a K(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi)d\xi+[K_1(t)]^{-1}\dot{\psi}(t),\ t\in[0,T], \qquad (14)$$

$$\lambda'(x)=-[K_2(x)]^{-1}\int_0^b\frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x}d\tau\cdot\lambda(x)-[K_2(x)]^{-1}\int_0^b\frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x}\mu(\tau)d\tau-$$

$$-[K_2(x)]^{-1}\int_0^b\frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x}\widetilde{u}(\tau,x)d\tau-[K_2(x)]^{-1}\int_0^b K(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)d\tau+[K_2(x)]^{-1}\varphi'(x)\,,\ x\in[0,\omega], \qquad (15)$$

Таким образом, имеем замкнутую систему уравнений (9) - (11), (12)-(15) для определения неизвестных $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, $\mu(t)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\lambda'(x)$.

Если известны $\mu(t)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\lambda'(x)$, то из (9) - (11) находим функции $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$. Обратно, если известны функции $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, то из системы уравнений (12)-(15) можем найти $\mu(t)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\lambda'(x)$.

Так как неизвестными являются как $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, так и $\mu(t)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\lambda'(x)$, для нахождения решения задачи (4) - (8) используем итерационный метод.

Тройку $(\mu^*(t),\lambda^*(x),\widetilde{u}^*(t,x))$ - решение задачи (4) - (8), определяем как предел последовательности троек $(\mu^{(m)}(t),\lambda^{(m)}(x),\widetilde{u}^{(m)}(t,x))$, $m=0,1,2,\ldots$, по следующему алгоритму:

Шаг-0. а) Полагая в правой части интегрального соотношения (12) $\widetilde{u}(t,x)=0$, $\lambda(x)=\mu^{(0)}(0)$ находим $\mu^{(0)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$, а в интегральном соотношении (13), полагая в правой части $\widetilde{u}(t,x)=0$, $\mu(t)=\lambda^{(0)}(0)$ - $\lambda^{(0)}(x)$ для всех $x\in[0,\omega]$. В соотношении (14), полагая в правой части $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$, $\lambda(x)=\mu^{(0)}(0)$, $\widetilde{u}(t,x)=0$, $\widetilde{w}(t,x)=0$, находим $\dot{\mu}^{(0)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$, а в соотношении (15), полагая в правой части $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$, $\mu(t)=\lambda^{(0)}(0)$, $\widetilde{u}(t,x)=0$,