N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 316 (2017), 96 – 107

UDC 517.94

E. Musrepova, A.N. Zhidebaeva, A.Sh. Shaldanbaev

South Kazakhstan Pedagogical University, Shymkent
zhanat.dauletbeckyzi@mail.ru shaldanbaev51@mail.ru

ON OPERATOR METHODS FOR SOLVING A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER WITH A VARIABLE COEFFICIENT

Abstract. In this paper, we obtain a spectral decomposition of the solution of the Cauchy problem in a space with an indefinite metric, and with this decomposition a boundary layer expansion of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem is derived, for a model equation of the first order $\varepsilon y' + a(x)y(x) = f(x), y(0) = 0, a(x) > 0, f(x) \in W_2^n[0,1], a(x) \epsilon C^n[0,1]$.

Keywords: completely continuous operator, Hilbert-Schmidt's theorem, selfadjoint operator, Volterian operators, indefinite metric, Schmidt decomposition, completeness, orthonormal basis.

УДК 517.94

Э. Мусрепова, А.Н. Жидебаева, А.Ш. Шалданбаев

Оңтүстік Қазақстан педагогикалық университеті, Шымкент қ-сы

СИНГУЛЯР ӘСЕРЛЕНГЕН, БІРІНШІ РЕТТІ ТЕҢДЕУДІҢ, КОШИЛІК ЕСЕБІН ШЕШУДІҢ ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСТЕРІ

1. Кіріспе

Егер f(x)$\in L^2(0,1)$, ал a(x)-дегеніміз, [0,1] кесіндісі бойында үзіксіз нақты функция болса, онда, мына,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + a(x)\, y(x) = f(x),\ x \in (0,1]\ ; \tag{1}$$

$$y(0)=0 \tag{2}$$

Коши есебінің шешімі $\varepsilon \to +0$ сәтінде қайда ұмтылады, жалпы бұл үшін $a(x)$ функциясы қандай болуы керек?

Бұл есепті шешудің көптеген әдістері бар [1-9],өкінішке орай,бұл әдістердің көпшілігі жартылай эмпиристік әдістер қатарына жатады,себебі, есептің қалдық мүшесі, оның коэффициенттері арқылы бағаланбаған.Біз бұл есепті операторлық әдіспен [10-17] шешіп, әлгі олқылықты толтырмақпыз.

2. Зерттеу әдістері

Анықтама 1. Егер Гилберттің H кеңістігінің әрбір x∈H элементін, былайша,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

етіп, Н кеңістігінде жинақталатын қатарға бірмәнді таратуға болса, онда $\{e_k\}, k = 1,2,,,$ элементтер системасын осы Н кеңістігінің базисі дейміз. Бірмәнділік дегеніміз әрбір х элементіне тек бір ғана $\{x_k\}, k = 1,2,,,$ коэффициенттер тізбегі сәйкес келеді дегенді білдіреді.

Анықтама 2. Егер барлық х,у ∈ D(A) элементтері үшін, мына, (Ах, у)=(х, Ау) теңдігі орындалса онда бұл операторды эрмиттік дейміз.

Теорема 1. Әсіре үзіксіз эрмиттік оператордың спектрі тек меншікті мәндерден тұрады, олардың әрбірі санеселі, және оларға $\lambda = 0$ нүктесі ғана шектік нүкте бола алады. Керісінше, осындай қасиетке ие, эрмиттік оператор әсіре үзіксіз.

Теорема 2. Егер А−дегеніміз Гилберттің Н кеңістігіндегі әсіре үзіксіз әрі жалқы оператор болса, онда әрбір х∈Н үшін Ах элементі осы Н кеңістігінде жыйнақталатын, А операторының ортанормаланған меншікті векторларынан құралған, Фурьенің қатарына жіктеледі, яғни

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(x, \varphi_k\right) \cdot \varphi_k,$$

мұндағы λ_k - дегеніміз А операторының меншікті мәндері, ал φ_k - меншікті векторлары .

Осы теоремадан екі салдар шығады.

Салдар 1. Егер әсіре үзіксіз әрі жалқы А операторы қайтымды болса, онда оның меншікті векторларынан Н кеңістігінің базисін құрауға болады

Салдар 2. Егер А операторы Гилберттің сеперабелді Н кеңістігінде әсіре үзіксіз әрі жалқы болса, онда бұл кеңісітікте А операторының меншікті векторларынан құралған ортанормаланған базис бар.

Анықтама 3. Егер, мына,

$$\int_a^b \int_a^b |k(\mathrm{s},\mathrm{t})|^2 dsdt \prec \infty$$

шарт орындалса, онда $a \prec s, t \prec b$ жыйынында анықталған $K(\mathrm{x},\mathrm{t})$ функциясын Гилберт пен Шмидтің ядросы дейміз, айтпақшы, мұндағы a мен b шамалы-да, бейшамалы-да болуы мүмкін.

Теорема 3. Егер $K(\mathrm{s},\mathrm{t})$ - Гилберт пен Шмидтің ядросы болса, онда $t(\mathrm{x}) \in L^2(\mathrm{a},\mathrm{b})$ функциясына, мына, $g(\mathrm{s}) = \int_a^b K(\mathrm{s},\mathrm{t})\mathrm{f}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$ функцияны сәйкестендіретін интегралдық оператор $L^2(\mathrm{a},\mathrm{b})$ кеңістігінде әсіре үзіксіз.

Лемма 1. Егер кез келген $x \in [0,1]$ үшін

$$\text{(а)}\ a(\mathrm{x}) = \mathrm{a}(1-\mathrm{x});\ a(\mathrm{x}) \in \mathrm{C}[0,1]$$

$$\text{(б)}\ Su(\mathrm{x}) = \mathrm{u}(1-\mathrm{x})$$

болса, онда SL_ε - операторы $L^2(0,1)$ кеңістігінде симметриялы.

Дәлелі. Мына, $u(\mathrm{x})$ және $v(\mathrm{x})$ функциялары L_ε операторының $\mathrm{D}(L_\varepsilon)$ аймағында жатсын делік, яғни $u(\mathrm{x}) \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon)$. және $\mathrm{v}(\mathrm{x}) \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon)$;

$$\mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon) = \left\{ y(\mathrm{x}) \in C^1(0,1] \cap C[0,1];\ \mathrm{y}(0) = 0 \ \right\}.$$

Онда, төмендегі, формулалар орынды.

$$\left(SL_\varepsilon u, v\right) = \int_0^1 L_\varepsilon u S v dx = \int_0^1 \left[\varepsilon u' + a(\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\right] v(1-\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \varepsilon \cdot \int_0^1 v(1-\mathrm{x})\,\mathrm{du} + \int_0^1 d(\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\,\mathrm{v}(1-\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \varepsilon\,\mathrm{v}(1-\mathrm{x})$$

$$u(x)\int_0^1 +\varepsilon - \int_0^1 u(x)\, v'(1-x)\, dx + \int_0^1 u(x)\, a(x)\, v(1-x)\, dx = \left|a(x) = a(1-x)\right| =$$

$$\varepsilon(u, S\frac{d}{dx}v) + \left(u, Sav\right) = (u, \varepsilon S\frac{d}{dx}v + Sav) = (u, SL_\varepsilon v),$$

мұндағы $(\cdot,\cdot)$ - дегеніміз $L^2(a,b)$ кеңістігіндегі скаляр көбейтінді.

Лемма 2. Егернақты, үзіксіз $a(x)$ - функциясы, мына,

$$a(x) \geq \alpha > 0, \forall\, x \in [0,1]$$

шартты қанағаттандырса, онда кез келген $u(x) \in D(L_\varepsilon)$ функциясы үшін, мынадай,

$$\left\|\overline{SL_\varepsilon u}\right\| \geq \alpha \cdot \|u\| \tag{3}$$

алғыбаға орынды мұндағы $(-)$ - дегеніміз қабындыру амалын білдіреді.

Дәлелі. Жоғарыдағы (1) теңдеудің екі жағын-да скаляр $u(x) \in D(L_\varepsilon)$ функциясына көбейтсек, мына, $(L_\varepsilon u, u) - \varepsilon \cdot (u', u) + (au, u) = (f, u)$ теңдікті аламыз, мұнан

$$\varepsilon(u', u) = \varepsilon \cdot \int_0^1 u' u dx = \varepsilon \int_0^1 u du = \varepsilon \cdot \frac{u^2(x)}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\varepsilon u^2(1)}{2} \geq 0;$$

мұнан,

$$(au, u) \leq (t, u) \leq \|t\| - \|u\| .$$

Жоруымыз бойынша $a(x) \geq \alpha > 0$ болғандықтан, соңғы теңсіздіктен

$$\alpha \cdot \|u\|^2 \leq (au, u) \leq \|t\| \cdot \|u\| => \alpha \cdot \|u\| \leq \|t\| = \|L_\varepsilon u\|.$$

S - унитар оператор болғандықтан, мына, $\|SL_\varepsilon u\| = \|L_\varepsilon u\|$ теңдік орынды, сондықтан $\|SL_\varepsilon u\| \geq \alpha \cdot \|u\|$. (4)

Егер $y(x) \in D(\overline{SL_\varepsilon})$ болса, онда $y(x) \in D(SL_\varepsilon)$ тізбегі табылып, мына, $y_n(x) \to y(x), SL_\varepsilon\, y_n \to SL_\varepsilon\, y$ шектік шарттар орындалады. Енді, мына, (4)

$$\|SL_\varepsilon\, y_n\| \geq \alpha \|y_n\|$$

теңсіздікте $\wedge \to \infty$ деп шекке көшсек, онда (3) теңсіздігін аламыз, яғни лемманың тұжырымын.

Салдар 3.

(а) Кері $(\overline{SL_\varepsilon})^{-1}$ операторы бар;

(б) $\overline{SL_\varepsilon}$ операторының мәндерінің жыйыны тұйық, яғни $\overline{R(SL_\varepsilon)} = R\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)$.

Шынында-да, егер $y \in \overline{R(SL_\varepsilon)}$ болса, онда $\{y_n\} \in R(\overline{SL_\varepsilon})$ тізбегі табылып $y_n \to y$ болар еді, яғни $y_n = \overline{SL_\varepsilon} x_n \to y$. Онда алғыбаға бойынша $\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\| : \alpha$, демек $\{x_n\}$ - фундаментәлді тізбек, сондықтан $x \in H$ элементі табылып $x_n \to x$ болады, мұнан $x_n \to x$,