N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 312 (2017), 126 – 131

B.D. Koshanov, E.N. Adilbekov, E. Duysen

Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty
koshanov@list.ru , ermurat__91@mail.ru , erlan_duysen@mail.ru

THE DIMENSION OF THE SPACE SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE POISSON AND BIHARMONIC EQUATIONS IN UNBOUNDED DOMAINS - II

Annotation. In this paper, we investigate the behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson and the biharmonic equations in an unbounded domain. In studies of such problems there is a need of introduction of additional conditions at infinity determine uniquely solutions of the studied problems. In the paper the dimension of the space of solutions for the above mentioned task with additional conditions is calculated.
Keywords: Poisson equation, biharmonic equation, bi-Laplace operator, Dirichlet problem.
MSC 35J67, 31A30, 31A10.

УДК 517.951

Б.Д. Қошанов, Е.Н. Әділбеков, Е. Дуйсен

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы

ШЕКТЕЛМЕГЕН ОБЛЫСТА ПУАССОН ЖӘНЕ БИГАРМОНИАЛЫ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ДИРИХЛЕ ЕСЕБІ ШЕШІМДЕР КЕҢІСТІГІНІҢ ӨЛШЕМІ - II

Аннотация. Бұл жұмыста шектелмеген облыста Пуассон және бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есептерінің шешімдері зерттелген. Осындай зерттеулер кезінде қарастырылып отырған есептердің шешімін бірмәнді анықтау үшін шексіздікте қосымша шартты енгізу қажеттілігі туындайды. Қосымша шарты бар аталған есептердің шешімі көрсетілген кеңістіктердің өлшемдері есептелінген.
Тірек сөздер: Пуассон теңдеуі, бигармониалы теңдеу, би-Лаплас операторы, Дирихле есебі.

Бұл жұмыстың екінші бөлімі - жалғасы. Осы бөлімде бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебіне шексіздікте қосымша шарты бар шешімдер кеңістігінің өлшемі есептелінеді.

Бірінші бөлімде көрсетілген кеңістіктердің белгілеулері, есептердің және формулалардың номерлері өзгертілмей сол күйінде ары қарай жалғастырып кете береміз.

Енді $D_\alpha(u,\Omega)<\infty$ шарты бар (15), (13) есебінің шешімдер кеңістігінің өлшемін есептеуге көшейік.

Теорема 2.1. $n>2$ *болсын.*

1) Егер $n-2\le\alpha<\infty$, *онда* $m_1(\alpha)=0$;

2) Егер $-n\le\alpha<n-2$, *онда* $m_1(\alpha)=1$;

3) Егер әрбір натурал r *үшін* $-2r-n\le\alpha<-2r-n+2$ *болса, онда*

$$m_1(\alpha)=\sum_{k=1}^{r}(2k+n-2)\cdot\frac{(k+n-3)!}{(n-2)!k!}.$$

Дәлелдеуі. Теореманың 2) жағдайын ғана дәлелдейміз. Алдымен $m_1(0)=1$ болатындығын көрсетейік. Айталық u_0 (15)-(17) есебінің $\varphi\equiv 1$ шартымен шешімі болсын. Осындай шешім лемма 1.1 бойынша бар және ол жалғыз.

$u(x)=u_0(x)-1$ функциясын қарастырамыз. $u(x)$ функциясы (15) теңдеуді және (13) шекаралық шартты қанағаттандыратыны айқын. Сонымен қатар (17) көмегімен $D_\alpha(u,\Omega)<\infty$ болады. Сондықтан, $u(x)\in\Pi_1(0)$. Осылайша $m_1(0)\geq 1$.

$\Pi_1(0)$ кеңістігінің кез-келген $\upsilon(x)$ функциясы $\upsilon(x)=s\cdot u(x)$ түрінде болатындығын дәлелдейік, мұндағы $s\in R-$ кейбір тұрақты. Лемма 1.1 бойынша $u(x)$ функциясы үшін келесі өрнек орынды:

$$u(x)=P(x)+C_0\Gamma(x)+\sum_{j=1}^{n}C_j\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j}+u_1(x), \tag{18}$$

мұндағы $P(x)$ - көпмүшелік, $\deg P(x)\leq 1$ және $u_1(x)$ функциясы (14) теңсіздігін қанағаттандырады. $P(x)\equiv a_0\neq 0$ болатындығын көрсетейік. Кері жориық. Айталық $a_0=0$ болсын. Онда

$$|u(x)|\leq|c_0\Gamma(x)|+\sum_{j=1}^{n}\left|c_j\cdot\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j}\right|+|u_1(x)|\leq const\cdot|x|^{2-n}, \tag{19}$$

$$|\nabla u(x)|\leq|c_0\nabla\Gamma(x)|+\sum_{j=1}^{n}\left|c_j\cdot\nabla\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j}\right|+|\nabla u_1(x)|\leq const\cdot|x|^{1-n}.$$

(15) теңдеуді $\Phi(x)=\theta_N(x)\cdot u(x)$ функциясына көбейтіп, оны Ω бойынша интегралдасақ

$$0=\int_\Omega\Delta u(x)\cdot\Phi(x)dx\equiv\int_\Omega\Delta u(x)\cdot\theta_N(x)\cdot u(x)d(x)\equiv$$

$$\equiv-\int_\Omega\theta_N(x)\cdot|\nabla u(x)|^2dx-\frac{1}{N}\int_\Omega\nabla u(x)\cdot\theta_N(x)\cdot u(x)dx. \tag{20}$$

аламыз, мұндағы $\theta_N(x)=\theta\left(\frac{|x|}{N}\right)$, $\theta\in C^\infty(R^1)$, $0\leq\theta\leq 1$; $s<1$ болса $\theta(s)=1$ және $s>2$ болса $\theta(s)=0$.

Алынған (20) теңдіктің оң жағында екінші қосылғышты бағалаймыз. (19) теңсіздіктің көмегімен $N\to\infty$

$$\left|\frac{1}{N}\int_\Omega\nabla u(x)\cdot\theta_N(x)\cdot u(x)dx\right|\leq C\cdot\frac{1}{N}\int_{\Omega\cap\{|x|>N\}}|\nabla u(x)|\cdot|u(x)|\cdot|x|dx\leq C\cdot\int_{|x|>N}|x|^{2-2n}dx\to 0$$

болады. Осыдан және (20) теңдігінен $\int\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|^2 dx = 0$ шығады, яғни $u(x) = const$. (13) шекаралық шарттың көмегімен $u(x) \equiv 0$. Алынған қарам- қайшылық (20) өрнегіндегі тұрақты $a_0 \neq 0$ болатындығын көрсетеді.

$\upsilon(x)$ функциясы $\Pi_1(0)$ кеңістігінен алынған кез-келген функция болсын. Онда лемма 1.1 көмегімен

$$\upsilon(x) = a_0' + c_0'\Gamma(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j' \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j} + \upsilon_1(x) \qquad (21)$$

болады, мұндағы $\upsilon_1(x)$ функциясы (17) бағалауды қанағаттандырады.

$s = \dfrac{a_0'}{a_0}$ деп алып және $w(x) = \upsilon(x) - s \cdot u(x)$ функциясын қарастырамыз. Ω-да $\Delta w = 0$ және $w(x)\big|_{\partial\Omega} = 0$ болатындығы айқын. Сонымен қатар (18), (21) және s санының таңдауының көмегімен $w(x)$ функциясы (20) теңсіздігін қанағаттандырады. Осыдан, жоғарыда көрсетілгендей, $w(x) = 0$ болатындығы шығады. Осылайша, $m_1(0) = 1$.

Енді $-n \le \alpha < n-2$ үшін $m_1(\alpha) = m_1(0)$ болатындығын көрсетейік. Айталық, кейбір $\alpha \in [-n;0)$ үшін $u(x) \in \Pi_1(0)$ болсын. Онда лемма 1.1-ден

$$u(x) = a_0 + c_0\Gamma(x)\sum_{j=1}^{n} C_j \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x) \quad (22)$$

шығады. Сондықтан

$$|\nabla u(x)| \le |\nabla c_0\Gamma(x)| + \sum_{j=1}^{n}\left|c_j \cdot \nabla\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j}\right| + |\nabla u_1(x)| \le const \cdot |x|^{1-n} \quad . \qquad (23)$$

Осыдан

$$D_0(u,\Omega) \equiv \int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2 dx \le const \cdot \int\limits_{\Omega}|x|^{2-2n+\alpha} dx < \infty,$$

Шығады, яғни $u(x) \in \Pi_1(0)$.

Осылайша $-n \le \alpha < 0$ үшін $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ болады. Басқаша айтқанда $\alpha < 0$ үшін $\Pi_1(\alpha) \subset \Pi_1(0)$. Сондықтан $-n \le \alpha < 0$ үшін $m_1(\alpha) = m_1(0)$.

$0 \le \alpha < n-2$ болған жағдайды қарастырайық. Көрсетілген α параметірінің мәндері үшін $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ болатындығын көрсетсек жеткілікті.

Айталық, $u(x) \in \Pi_1(0)$ болсын. Онда $u(x)$ функциясын (22) түрде жазуға болады және ол үшін (23) бағалауы орынды. Яғни $\alpha < n-2$ үшін

$$D_\alpha(u,\Omega) = \int\limits_{\Omega}\rho^\alpha|\nabla u|^2 dx \le const \cdot \int\limits_{\Omega}|x|^{2-2n+\alpha} dx < \infty,$$

яғни $u(x)\in\Pi_1(\alpha)$. Осылайша, $0\le\alpha<n-2$ болған кезде, $\Pi_1(0)\subset\Pi_1(\alpha)$ және $m_1(\alpha)=m_1(0)=1$. Теорема дәлелденді.

3 Шектелмеген облыстағы бигармониялы теңдеу үшін Дирихле есебі

Координат бас нүктесі бар $\overline{G}$ компакттың сыртында, яғни шексіз облыста бигармониялы теңдеу үшін келесі Дирихле есебінің $u(x)$ шешімін зерттейміз:

$$\Delta^2 u(x)\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2\partial x_j^2}=0,\quad x\in\Omega\equiv R^n\setminus\overline{G}, \tag{24}$$

$$u(x)\Big|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0. \tag{25}$$

Бірінші бөлімге сай функциялар кеңістіктерінің белгілеулерін сол күйінде қалдырамыз.

Анықтама 3.1. *Егер* $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}^{3}_{2,loc}(\Omega)$ *және кез-келген* $\psi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ *функциясы үшін*

$$\int_\Omega \Delta u\cdot\Delta\psi dx=0, \tag{26}$$

интегралдық теңдігі орындалса, онда $u(x)$ функциясын (24),(25) есебінің жалпыланған шешімі деп атайды.

Біз осы бөлімде

$$D_\alpha(u,\Omega)\equiv\int_\Omega \rho^\alpha\left[\left|\nabla(\Delta u)\right|^2+\left|u\right|^2\right]dx<\infty$$

шартын қанағаттандыратын (24), (25) есебінің шешімдер кеңістігінің өлшемін есептейміз.

Лемма 3.1. $u(x)$ функциясы $D_\alpha(u,\Omega)<\infty$ шартын қанағаттандыратын Ω облысындағы $\Delta^2 u(x)=0$ теңдеуінің шешімі болсын. Онда $n>4$ үшін $u(x)$ функциясы келесі өрнекке

$$u(x)=P(x)+C_0\Gamma(x)+\sum_{j=1}^{n}C_j\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j}+u_1(x), \tag{27}$$

ие болады, мұндағы $P(x)-$ дәрежесі d_0-ден төмен көпмүшелік

$$d_0=\max\left\{1;2-\frac{\alpha+\mathrm{n}}{2}\right\},$$

$\Gamma(x)=-\dfrac{1}{(4-n)4\cdot(2-n)}\cdot\dfrac{1}{\sigma_n}|x|^{4-n}$ - би-Лаплас операторының іргелі шешімі [4], $\sigma_n=(2\pi)^n-R^n$ кеңістігіндегі бірлік сфераның бетік аудыны, $C_i, i=0,1,\dots,n-$кейбір тұрақтылар, $u(x)$ функциясы үшін келесі бағалау орындалады:

$$\left|\partial_x^\gamma\Delta u_1(x)\right|\le b_\gamma|x|^{-n-|\gamma|}, \tag{28}$$

$\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$, $\gamma_i, i=1,\dots,n-$ бүтін теріс емес сандар, $b_\gamma=const$, $\partial_x=(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n})$, $\partial_{x_j}=\dfrac{\partial}{\partial_{x_j}}$, $j=1,\dots,n.$