OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 314 (2017), 230 – 240

UDC 517.94

Besbayev G.A.[1], ShaldanbayevA.Sh. [1], Akylbayev M.I. [2]

[1]South Kazakhstan State University, Shymkent
[2]Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM, FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS, BY THE OPERATOR METHOD

Abstract. In this paper we obtain a spectral decomposition of the solution of the Cauchy problem in a space with an indefinite metric, and with the help of this expansion we deduce the boundary layer expansion of the solution of the singularly perturbed Cauchy problem, for an ordinary second-order differential equation

Key words: completely continuous operator, selfadjoint operator, Gilbert-Schmidt theorem, Volterian operators, indefinite metric, Schmidt decomposition, completeness, orthonormal basis.

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + a\,y'(x) + by(x) = f(x)\,,\ a, b\ \text{-}const\,,\ y(0) = 0, y'(0) = 0\,;$$
$$f(x) \in L^2(0,1),\ y(x) \in C^2(0,1) \cap C^2[0,1].$$

УДК 517.94

Г.А. Бесбаев,[1] А.Ш. Шалданбаев,[1] М.И. Ақылбаев[2]

[1]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ-сы;
[2]Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы

КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ ТҰРАҚТЫ ЕКІНШІ РЕТТІ КӘДІМГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ СИНГУЛЯР ӘСЕРЛЕНГЕН КОШИЛІК ЕСЕБІН ШЕШУДІҢ ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСІ ТУРАЛЫ

1. Кіріспе.

Гилберттің $L^2(0,1)$ кеңістігінде Кошидің, мынадай,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + a\,y'(x) + by(x) = f(x)\ (1)$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 0\ (2)$$

есебін қарастырайық, мұндағы $\varepsilon > 0$ -азшама, a, b $\text{-}const$, $f(x) \in L^2(0,1), y(x) \in C^2(0,1) \cap C^2[0,1]$.

Мына, $\varepsilon = 0$ сәтте ,жоғарыдағы (1)- (2) теңдіктерінен әсерленбеген, мынадай

$$L_0 z = az'(x) + bz(x) = f(x)\ (1)'$$
$$z(0) = 0\ (2)'$$

есепке келеміз.Мына,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(x,\varepsilon) = z(x)$$

теңдік қай кезде орындалады деген сұрақ туындайды, яғни бұл теңдік орындалуы үшін $f(\mathrm{x})$ функциясы мен a, b - коэффициенттері қандай болуы керек?Бұл есепті шешудің көптеген әдістері бар [1-9],өкінішке орай,бұл әдістердің көпшілігі жартылай эмпиристік әдістер қатарына жатады,себебі, есептің қалдық мүшесі, оның коэффициенттері арқылы бағаланбаған.Біз бұл есепті спектрәлдік әдіспен [10-17] шешіп, әлгі олқылықты толтырмақпыз.

2. Зерттеу әдістері

Жоғарыдағы (1)- (2)-есебіне, мынадай,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(\mathrm{x}) + ay'(\mathrm{x}) + \mathrm{by}(\mathrm{x}) \ ,$$

$$D(\mathrm{L}_\varepsilon) = \left\{ y(\mathrm{x}) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]; \mathrm{y}(0) = 0, \mathrm{y}'(0) = 0 \right\}$$

сызықтық оператор сәйкес келеді.

Лемма 1. Егер $Su(\mathrm{x}) = \mathrm{u}(1-\mathrm{x})$ болса, онда SL_ε операторы $L^2(0,1)$ -кеңістігінде симметриялы.

Дәлелі. Айталық, $u(\mathrm{x}), \mathrm{v}(\mathrm{x}) \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon)$ болсын, онда

$$(\mathrm{SL}_\varepsilon \mathrm{u}, \mathrm{v}) = (\mathrm{L}_\varepsilon \mathrm{u}, Sv) = \int_0^1 \left[\varepsilon u'' + au'(\mathrm{x}) + \mathrm{bu}(\mathrm{x})\right] v(1-\mathrm{x})\,\mathrm{dx} =$$

$$\varepsilon \int_0^1 v(1-\mathrm{x})\,\mathrm{du}' + \mathrm{a}\int_0^1 v(1-\mathrm{x})\,\mathrm{du} + \int_0^1 bu(\mathrm{x})\,\mathrm{v}(1-\mathrm{x})\,\mathrm{dx} =$$

$$\varepsilon v(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u}'(\mathrm{x})\int_0^1 + av(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\int_0^1 + \varepsilon \int_0^1 v'(1-\mathrm{x}) \cdot \mathrm{u}'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} +$$

$$+a\int_0^1 v'(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} + \int_0^1 bv(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} =$$

$$v'(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\int_0^1 + \varepsilon \int_0^1 v''(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} + \mathrm{a}\int_0^1 v'(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} +$$

$$\int_0^1 bv(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int_0^1 u(\mathrm{x})\left[\varepsilon v''(1-\mathrm{x}) + \mathrm{av}'(1-\mathrm{x}) + \mathrm{bv}(1-\mathrm{x})\right] dx = (\mathrm{u}, \mathrm{SL}_\varepsilon \mathrm{v}) \ .$$

Салдар1. SL_ε қабынатын оператор.

Лемма 2. L_ε -операторының сыңарласы, келесі,

$$L_\varepsilon^+ v = \varepsilon v''(\mathrm{x}) - a\,\mathrm{v}'(\mathrm{x}) + bv(\mathrm{x}), \mathrm{D}(L_\varepsilon^+) = \left\{ v(\mathrm{x}) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]; \mathrm{z}(1) = 0, \mathrm{z}'(1) = 0 \right\}$$

оператор болады.

Дәлелі. $u(\mathrm{x}) \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon)$ және $\mathrm{v}(\mathrm{x}) \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon^+)$ болсын делік, сонда,

$$\left(L_\varepsilon u, v\right) = \int_0^1 (\varepsilon\,\mathrm{u}'' + \mathrm{au}'(\mathrm{x}) + \mathrm{bx})v(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \varepsilon \int_0^1 v(\mathrm{x})\,\mathrm{du}'(\mathrm{x}) + \mathrm{a}\int_0^1 v(\mathrm{x})\,\mathrm{du} + \mathrm{b}\int_0^1 u(\mathrm{x})\,\mathrm{v}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} =$$

$$\varepsilon v(\mathrm{x})\,\mathrm{u}'(\mathrm{x})\int_0^1 - \varepsilon - \int_0^1 v'(\mathrm{x})\,\mathrm{u}'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} + \mathrm{av}(\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\int_0^1 - a\int_0^1 v''(\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} +$$

$$b\int_0^1 u(\mathrm{x})\,\mathrm{v}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = -\varepsilon \int_0^1 v'(\mathrm{x})\,\mathrm{du}(\mathrm{x}) - \mathrm{a}\int_0^1 v'(\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} + \mathrm{b}\int_0^1 u(\mathrm{x})\,\mathrm{v}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} =$$

$$= -\varepsilon v'(x)u(\mathrm{x})\int_0^1 + \varepsilon \int_0^1 v''(\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} - \mathrm{a}\int_0^1 v'(\mathrm{x})\,\mathrm{u}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} + b\int_0^1 u(\mathrm{x})\,\mathrm{v}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} =$$

$$=\int_0^1 u(x)\left[\varepsilon v''(x)-av'(x)+bv(x)\right]=(u,L_\varepsilon^+v)\ .$$

Салдар 2. L_ε -қабынатын оператор, себебі $L_\varepsilon^+\subset L_\varepsilon^*$ және L_ε^+ -тығыз анықталған.

Лемма 3. (Алғы бағалар туралы)

Егер $a>0$, $b\geq 0$ болса, онда, келесі, $\|y\|\leq\|L_\varepsilon y\|,\left\|y\right\|_1\leq\sqrt{2}\|L_\varepsilon y\|$

алғы бағалар орынды.

Дәлелі. О баста, $y(x)\in D(L_\varepsilon)$ делік, онда

$$L_\varepsilon y=\varepsilon y''(x)+ay'(x)+by(x),(L_\varepsilon y,y')=\varepsilon(y'',y')+a\|y'\|^2+b(y,y'),$$

$$(y'',y')\int_0^1 y'dy'=\frac{(y')^2(x)}{2}\int_0^1=\frac{y'^2(1)}{2}\geq 0;$$

$$(y,y')=\int_0^1 yy'dx=\frac{y^2(x)}{2}\int_0^1=\frac{y^2(1)}{2}\geq 0;\Rightarrow a\|y'\|^2\leq(L_\varepsilon y,y')\leq\left|(L_\varepsilon y,y')\right|\leq\|L_\varepsilon y\|\cdot\|y'\|,\Rightarrow a\cdot\|y'\|\leq\|L_\varepsilon y\|$$

Егер $y(0)=0$ болса, онда $\|y\|\leq\|y'\|$. Шынында-да,

$$y(x)=\int_0^x y'(t)\,dt,\Rightarrow(y(x))=\left|\int_0^x y'(t)\,dt\right|\leq\left(\int_0^x 1^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^x y'^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq x^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x y'^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\leq\|y'\|,\Rightarrow\|y\|\leq\|y'\|.$$

Демек, $\|y\|\leq\|y'\|\leq\|L_\varepsilon y\|$ және $\|y\|_1=\sqrt{\|y\|^2+\|y'\|^2}\leq\sqrt{\|L_\varepsilon y\|+\|L_\varepsilon y\|}\leq\sqrt{2}\|L_\varepsilon y\|$.

Егер $y\in D(\overline{L_\varepsilon})$ болса, онда, мынадай, $y_n\to y,L_\varepsilon y\to\overline{L_\varepsilon y}$ болатын $\{y_n\}\in D(L_\varepsilon),n=1,2...$ тізбегі табылады. Онда $n\to\infty$ сәтінде ,мынадай, $\|y_n\|\to\|y\|,\|y'_n\|\to\|y'\|$,және $\|L_\varepsilon y_n\|\to\|L_\varepsilon y\|$ болады, сондықтан кезкелген $\forall y\in D\left(\overline{L_\varepsilon}\right)$ үшін, келесі,

$$\|y\|\leq\|y'\|\leq\left\|\overline{L_\varepsilon}y\right\|,\|y\|_1\leq\sqrt{2}\left\|\overline{L_\varepsilon}y\right\|$$

теңсіздіктер орынды.

Егер $\overline{L_\varepsilon}y=0$ болса, онда $y=0$, сондықтан кері $(\overline{L_\varepsilon})^{-1}$ операторы бар және ол әсіре үзіксіз (Реллихтың теоремасы бойынша).

$SL_\varepsilon-$ операторы симметриялы болғандықтан, оның қабындысы $\overline{SL_\varepsilon}=S\overline{L_\varepsilon}$ операторы-да симметриялы, және $\overline{L_\varepsilon}$ қайтымды, онда $S\overline{L_\varepsilon}$ операторы-да, сондай, демек $\overline{SL_\varepsilon}$ жалқы оператор. Онда $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$ операторы-да жалқы, және әсіре үзіксіз, демек, Гилберт-Шмидтің теоремасы бойынша, келесі,

$$\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}f=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}f\varphi_n\right)-\varphi_n(x)+\varphi_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f_1\left(SL_\varepsilon\right)^{-1}\varphi_n)\cdot\varphi_n(x)+\varphi_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n}\cdot\varphi_n(x)+\varphi_0(x),$$

таралым орынды, мұндағы $\varphi_0(x)\in Ker\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$, яғни $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}\varphi_0=0,\Rightarrow\varphi_0(x)=0$. Демек,

$$\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}f=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x).$$

Егер $(\mathrm{f},\varphi_n)=0, \mathrm{n}=1,2,\ldots$ болса,онда , мұнан, $f=0$, демек, $\{\varphi_n(\mathrm{x})\}, n=1,2,\ldots$ толық система.

Теорема 1. Егер $a>0, b\geq 0$ болса, онда

1) Кері $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$ операторы бар, және ол әсіре үзіксіз жалқы оператор.

2) $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$-операторының нормаланған меншікті векторлары L^2 (0,1) кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Егер $L_\varepsilon y=f$ болса, онда

$$SL_\varepsilon y=Sf(\mathrm{x})\Rightarrow \overline{SL}_\varepsilon y=Sf(\mathrm{x}),\Rightarrow \mathrm{y}(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{f})=\left(SL_\varepsilon\right)^{-1}Sf(\mathrm{x})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{Sf},\varphi_n)}{\lambda_n}\cdot\varphi_n(\mathrm{x}).$$

Теорема 2. Егер $a>0, b\geq 0$ болса, онда Кошидің, жоғарыдағы (1)- (2) есебі ,әлді шешіледі және бұл әлді шешім, мынадай,

$\mathrm{y}(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{f})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{Sf},\varphi_n)}{\lambda_n}\cdot\varphi_n(\mathrm{x})$ болады, сонымен бірге кезкелген $\varepsilon>0$ үшін $y\in W_2^2(0,1)$ болады.

3. Зерттеу нәтиежелері

Егер –де$\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}\varphi_n(\mathrm{x})=\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(\mathrm{x}), n=1,2,\ldots,$ болса, онда $\varphi_n(\mathrm{x})\lambda_n=\overline{SL}_\varepsilon\varphi_n$. Енді $\varphi_n(\mathrm{x})\in \mathrm{D}\left(\overline{L}_\varepsilon\right)$ екенін ескерсек, онда $\varphi_n(\mathrm{x})\in W_2^2(0,1)$, сондықтан,

$$\overline{SL}_\varepsilon\varphi_n(\mathrm{x})=SL_\varepsilon\varphi_n=S\left[\varepsilon\varphi_n''+a\varphi_n'(\mathrm{x})+\mathrm{b}\,\varphi_n(\mathrm{x})\right]=\lambda_n\varphi_n(\mathrm{x}),\Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi_n''(\mathrm{x})+\mathrm{a}\,\varphi_n'(\mathrm{x})+\mathrm{b}\,\varphi_n(\mathrm{x})=\lambda_n S\varphi_n(\mathrm{x}),\quad (3)$$

$$\varphi_n(0)=0,\varphi_n'(0)=0.$$

Ұйғарым. Меншікті $\varphi_n(\mathrm{x})$ $(\mathrm{n}=1,2,\ldots)$ функциялары шексіз рет дифференциалданады, бұл қасиет a,b коэффициенттерінің тұрақтылығының салдары.

Енді $\left(Sf,\varphi_n\right), n=1,2,\ldots,$ Фуренің коэффициенттерін есептейік. В-операторы мынадай,

$$Bz(\mathrm{x})=\mathrm{a}z'(\mathrm{x})+\mathrm{b}z(\mathrm{x}),$$

$$z(0)=0$$

болсын делік. Мына, $\varphi_n(\mathrm{x})\in \mathrm{D(B)}$ жайды ескеріп, (3) формуланы, былай,

$\varepsilon\varphi_n''(\mathrm{x})+B\varphi_n(\mathrm{x})=\lambda_n S\varphi_n(\mathrm{x})$ жазайық, мұнан,

$$\varepsilon B^{-1}\varphi_n''(\mathrm{x})+\varphi_n(\mathrm{x})=\lambda_n B^{-1}S\varphi_n, \mathrm{n}=1,2,\ldots,\Rightarrow \varphi_n(\mathrm{x})=\lambda_n B^{-1}S\varphi_n-\varepsilon B^{-1}\varphi_n''(\mathrm{x});$$

$$\left(Sf\varphi_n\right)=\left(Sf,\lambda_n B^{-1}S\varphi_n-\varepsilon B^{-1}\varphi_n''\right)=\lambda_n\left(Sf,B^{-1}S\varphi_n\right)-\varepsilon\left(Sf,B^{-1}\varphi_n''\right)=$$

$$\lambda_n\left(\left(B^{-1}\right)^{+}Sf,S\varphi_n\right)-\varepsilon\left(\left(B^{-1}\right)^{+}Sf,\varphi_n''\right)=$$

$$=\lambda_n\left(SB^{-1}f,S\varphi_n\right)-\varepsilon\left(SB^{-1}f,\varphi_n''\right)=\lambda_n\left(B^{-1}f,\varphi_n\right)-\varepsilon\left(SB^{-1}f,\varphi_n''\right);$$

$$\left(SB^{-1}f,\varphi_n''\right)=\int_0^1 SB^{-1}fd\varphi_n'(\mathrm{x})=SB^{-1}f\cdot\varphi_n'(\mathrm{x})\Big|_0^1-\int_0^1\left(SB^{-1}f\right)'\varphi_n'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=$$

$$-\left(SB^{-1}f\right)'\varphi_n(\mathrm{x})+\int_0^1\left(SB^{-1}f\right)''\varphi_n(\mathrm{x})=$$