N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 315 (2017), 127 – 133

UDC 517.94

A.A. Kopzhasarova, A.Sh. Shaldanbayev, A.B. Imanbayeva

Southern Kazakhstan state university of Auyezov M.
shaldanbaev51@mail.ru

THE DECISION IS SINGULAR THE INDIGNANT TASK OF CAUCHY BY A SIMILARITY METHOD

Abstract: In the real work, the similarity method, has received frontier layer decomposition of the decision is singular the indignant task of Cauchy:

$L_\varepsilon y$=εy' (x) +q(x)y (x) =f(x), y(0)=0,

where q(x) ≥ α> 0, $f(x) \in W_2^n[0,1]$, $q(x) \in W_2^n[0,1]$.

Keywords:singulyarny, self-conjugate operator, similarity method, Gilbert-Schmidt's theorem, spectral decomposition, interface, asymptotic decomposition.

УДК 517.94

А.А.Копжасарова, А.Ш.Шалданбаев, Иманбаева А.Б.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О. Ауезова, г.Шымкент

Решение сингулярно возмущенной задачи Коши методом подобия

Аннотация: В настоящей работе, методом подобия, получено погранслойное разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + q(x)y(x) = f(x), y(0) = 0,$$

где $q(x) \geq \alpha > 0, f(x) \in W_2^n[0,1], q(x) \in W_2^n[0,1]$.

Ключевые слова: сингулярный, самосопряженный оператор, метод подобия, теорема Гильберта-Шмидта, спектральное разложение, пограничный слой, асимптотическое разложение.

1.Введение. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + q(x)y(x) = f(x), 0 < x \leq 1 \quad (1.1)$$

$$y(0) = 0, \quad (1.2)$$

где $f(x) \in L^2(0,1)$,$q(x) \in C[0,1]$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

Определение 1.1. Регулярным решением начальной задачи (1.1)-(1.2) называется непрерывно дифференцируемая в $(0,1]$ и непрерывная в $[0,1]$ функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнения (1.1) и начального условия (1.2).

Определение 1.2. Функция $y(x)$ называется сильным решением начальной задачи (1.1)-(1.2), если существует последовательность регулярных решений $\{y_n(x)\}$, $n = 1,2,\ldots$ начальных задач (1.1)-(1.2), такая, что $Ly \to f$, $y_n \to y$ в пространстве $L^2(0,1)$.

Определение 1.3. Начальная задача (1.1)-(1.2) называется сильно разрешимой, если для любого $f(x) \in L^2(0,1)$ существует единственное сильное решение начальной задачи (1.1)-(1.2).

Отметим, что при изучении различных сингулярно возмущенных задач возникает необходимость изучения задачи (1.1)-(1.2) [1.].Существуют различные методы решения этой задачи [1-5],но все они,или почти все являются полуэмпирическими.В этих работах точно указываются порядок остаточного члена по малому параметруε,но коэффициент при параметре остается не известным [6-8].Среди прикладников бытует мнение,что сингулярно возмущенные задачи стоять обособленно от остальной математики,поэтому широко известные методы здесь не применимы.Но как показаны в работах [9-15],такие задачи можно решать методами спектральной теории операторов [16-17],что и сделано в данной работе.

2.Метод исследования.

Сначала покажем сильную разрешимость начальной задачи (1.1)-(1.2).

Теорема 2.1.Если $q(x)$ непрерывная функция на отрезке $[0,1]$, удовлетворяющая условию

$$q(x) \geq \min q(x) = \alpha > 0, \tag{2.1}$$

то начальная задача (1.1)-(1.2) сильно разрешимо в пространстве $L^2(0,1)$ и это сильное решение имеет вид:

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot T^{-1}\varphi_n(x), \tag{2.2}$$

где

$$Tf(x) = exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot f(x), T^{-1}g(x) = exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot g(x),$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin\mu_n x, \mu_n = (-1)^n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right), n = 0,1,2,\ldots, S\varphi_n(x) = \varphi_n(1-x), n = 0,1,2,\ldots$$

Доказательство.

(а) Единственность. Предварительно докажем одну лемму, которая может иметь и самостоятельное значение.

Лемма 2.1. Если $q(x)$ непрерывная в $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условию

$$q(x) \geq \alpha > 0, \tag{2.1}$$

то для любой функции $y(x) \in C^1(0,1] \cap C[0,1]$ и удовлетворяющей условию $y(0) = 0$ имеет место неравенство:

$$\|L_\varepsilon y\| \geq \alpha \cdot \|y\|. \tag{2.3}$$

Доказательство. Умножив обе части уравнения (1.1) скалярно на $y(x)$, получим:

$$\varepsilon(y', y) + (q(xy, y)) = (f(x), y),$$

или

$$\frac{\varepsilon y^2(1)}{2} + \int_0^1 q(x)y^2dx = \int_0^1 f(x)y(x)dx.$$

Отсюда в силу неравенства (2.1), имеем

$$\alpha \cdot \|y\|^2 \leq \frac{\varepsilon y^2(1)}{2} + \int_0^1 q(x)y^2dx = (f, y) \leq |(f, y)| \leq \|y\| \cdot \|f\|.$$

Сократив обе части полученного неравенства на $\|y\|$, получим требуемое утверждение леммы.

Из этой леммы следует единственность сильного решения.

Предположим, что начальная задача (1.1)-(1.2) имеет более двух решений, тогда существуют по крайней мере два решения: $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $\|u(x)-v(x)\| \neq 0$, и $u_n \to u$, $L_\varepsilon u_n \to f; v_n \to v$, $L_\varepsilon v_n \to f$, $(n \to \infty)$, где $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ последовательности классических решений задачи (1.1)-(1.2). Тогда их разность $z_n = u_n - v_n$ является решением регулярной задачи $L_\varepsilon z_n = f_n - g_n, n = 1,2, \ldots$, поэтому в силу неравенства (2.3) имеет место неравенства:

$$\alpha \cdot \|z_n\| \leq \|L_\varepsilon z_n\| = \|f_n - g_n\|, n = 1,2, \ldots$$

Переходя к пределу в этом неравенстве ,при$n \to \infty$, получим

$$\alpha \cdot \|u - v\| = 0, => \|u - v\| = 0,$$

что противоречит нашему предположению, мы пришли к противоречию, стало быть не верно наше предположение о существовании более двух решений. Следовательно, существует не более одного решения.

(б) Существование решения. Пусть

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot T^{-1}\varphi_n(x) = T^{-1} \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot \varphi_n(x),$$

тогда

$$y_N(x) = exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot \varphi_n(x),$$

поэтому

$$y'_N(x) = -\frac{q(x)}{\varepsilon} y_N(x) + exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot \varphi'_n(x) = -\frac{q(x)}{\varepsilon} y_N(x) +$$

$$+exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon} \cdot S\varphi_n.$$

Следовательно,

$$L_\varepsilon y_N = \varepsilon \cdot y'_N + q(x) y_N(x) = exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n.$$

Оператор S является унитарным оператором, поэтому он переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис, стало быть, имеет место Фурье разложение:

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{N} (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n(x),$$

следовательно, последовательность $\sum_{n=0}^{N} (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n(x)$ является фундаментальной в $L^2(0,1)$. Тогда из непрерывности оператора T^{-1} следует фундаментальность последовательности $\{L_\varepsilon y_N\}$, $N = 1,2, \ldots$ в $L^2(0,1)$, а из априорной оценки (2.3) видно фундаментальность $\{y_N\}$ в $L^2(0,1)$.

Заметим, также, что функция

$$exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n$$

непрерывно в $[0,1]$, поэтому $\{y_N(x)\}$- есть последовательность классических решений. Итак, нами установлено, что $y_N(x) \to y(x)$,$L_\varepsilon y_N = g_n \to g$ в $L^2(0,1)$, поэтому функция $y(x)$ является сильным решением начальной задачи (1.1)-(1.2).

Теперь исследуем гладкость полученного сильного решения. В силу (2.1) и (2.3) имеет место неравенство