BULLETIN OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 1991-3494
Volume 2, Number 366 (2017), 13 – 22

UDC 531.1+629.195

M. D. Shinibaev[1], A. A. Bekov[1], B. N. Rahimganov[1], S. B. Momynov[1], A. G. Sadybek[2], B. T. Alimkulova[3], K. Abdrahmanov[3]

[1]National center of space researches and technologies, Almaty, Kazakhstan,
[2]University of Syr-Daria, Zhetysai, Kazakhstan,
[3]South-Kazakhstan state pedagogical institute, Shymkent, Kazakhstan.
E-mail: shinibaev_maxsut@mail.ru

ON THE EXISTENCE OF TWO CLASSES OF CIRCULAR ORBITS OF THE TEST BODY IN HILL VARIABLES

Abstract. The work [1, p. 119] of B.M. Schigolev investigated the second plane problem of Hill. For it, Hill proposed a scheme of the power function

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu r^2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \nu > 0, \quad \mu = f(m_0 + m),$$

where m_0 – central body mass, m – test body mass, f – the gravitational constant.

The structure of the force function is motivated by the fact that the motion of the pericenter (and the node in the spatial problem) is taken into account in the plane problem.

B. M. Schigolev avoiding the well known idea of circular orbits in the Hill second task, using his original method, has found [1, p. 98] following existence and evolution of circular orbits of the test body:

1. When $\alpha < 0{,}10546875$ there are two circular orbits.
2. These orbits are merged into one at $\alpha = 0{,}10546875$.
3. They disappear when $\alpha > 0{,}10546875$.

In this paper we prove the validity of these conclusions and in the case of the Hill plane problem. The existence of two classes of circular orbits in Hill variables is determined. The boundaries of these classes have been found as in Hill variables so in present variables. It was found laws valid both in flat and in case of a small inclination of the orbit to the main plane.

Key words: test body, of circular orbits, the Hill variables, class of orbits, Hill gravitational field, Earth satellite.

The differential equations of the orbital motion of the test body in the Hill variables have the form [1, p. 93]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 w}{d\upsilon^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{w^4}\right) w - \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} = 0, \\ &\frac{d^2 s}{d\upsilon^2} + \left(1 + \frac{\beta}{w^4}\right) s = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

where the variables w, s and Hill constants α, β – dimensionless, ϑ – the true length of the test body. They are defined by formulas

$$w = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad s = \operatorname{tg} \varphi, \quad \alpha = \frac{\nu C^6}{\mu^4}, \quad \beta = \frac{(\nu - \nu')C^6}{\mu^4}, \tag{2}$$

where C – area integral constant, $\rho^2 = x^2 + y^2$ – the projection of the radius-vector of the test body onto the Oxy plane, s – latitude tangent, φ – latitude of the test body, ν and ν' – Parameters chosen so that there will be actual observed motions of the pericenter and the node of the orbit.

True longitude and time are related to each other by the differential equation

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{C}{\rho^2}. \tag{3}$$

Expanding $\frac{1}{(1+s^2)^{3/2}}$ in a binomial series in powers of s, we can see that (1) describes the motion of the test body quite adequate at $0\le\varphi\le 10^0$.

The first-approximation equations at $s\neq 0$, $s^2\approx 0$ have the form:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2w}{d\upsilon^2}+\left(1+\frac{\alpha}{w^4}\right)w-1=0,\\&\frac{d^2s}{d\upsilon^2}+\left(1+\frac{\beta}{w^4}\right)s=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

The first equation from (4) at $w = R =$ const transforms into the equation of circular orbits

$$w^4-w^3+\alpha=0, \tag{5}$$

because $\frac{d^2w}{d\upsilon^2}=0$ and $w\neq 0$.

The same equation from (4) allows a decrease in the order [1, c. 99]:

$$d\vartheta=\frac{wdw}{\sqrt{\alpha+Hw^2+2w^3-w^4}}, \tag{6}$$

where $H=\frac{2hC^2}{\mu^2}$, h – energy integral constant.

In the case of the circular motion type $\alpha>0,\ H<0,\ e=0$, therefore (6) will have the form [2, p. 79]:

$$d\vartheta=\frac{wdw}{\sqrt{\alpha-Hw^2+2w^3-w^4}}, \tag{7}$$

e – eccentricity of the orbit.

Polynominal

$$P(w)=-w^4+2w^3-Hw^2+\alpha$$

has three positive roots α_1, α_2, α_3 and one negative root α_4, and let it be

$$\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4.$$

The actual motions correspond to positive values of the polynomial, $P(w)$, which are realized on two intervals [2, p. 79]:

$$\text{A) } \alpha_4<w<\alpha_3;\quad \text{B) } \alpha_2<w<\alpha_1.$$

Let us consider the second interval $\alpha_2<w<\alpha_1$. After the transition to the Legendre normal form, we have [2, p. 82]:

$$d\vartheta=\mu_0\frac{wd\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},\ 0\le\psi\le\frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

where

$$w=\frac{\alpha_2\alpha_{31}-\alpha_3\alpha_{21}\sin^2\psi}{\alpha_{31}-\alpha_{21}\sin^2\psi}, \tag{9}$$

$$k^2=\frac{\alpha_{43}\alpha_{21}}{\alpha_{31}\alpha_{42}},\quad \mu_0=\frac{2}{\sqrt{\alpha_{31}\alpha_{42}}},\quad 0<k<1,\quad \alpha_{ik}=\alpha_k-\alpha_i\quad (k,i=1,2,3,4).$$

The first circular orbit is apparently realized when $\psi = 0$, here from (8) and (9) we have

$$R_1 = w_1 = \alpha_2 . \tag{10}$$

The second circular orbit is apparently realized when $\psi = \frac{\pi}{2}$, here from (8) and (9) we have

$$R_2 = w_2 = \alpha_1 .$$

Except that $R_2 > R_1$. On the Oxy plane they are arranged concentrically.

On the interval $\alpha_4 < w < \alpha_3$ similarly we have two more circular orbits

$$R_3 = w_3 = \alpha_4 \text{ at } \psi = 0 \quad \text{and} \quad R_4 = w_4 = \alpha_3 \text{ at } \psi = \frac{\pi}{2} .$$

By combining the center of the circles with the center mass of the central body, we have 4 circular concentric orbits (Figure 1). Radii of circular orbits as rising ψ from 0 to $\frac{\pi}{2}$, increase from R_3 to R_4 and from R_1 to R_2. There is no actual motion between the roots (α_3, α_2), as there is the polinomial $P(w) < 0$. It should be noted that the actual motions of the test body exist on the intervals (α_2, α_1) and (α_4, α_3), as they have $P(w) > 0$.

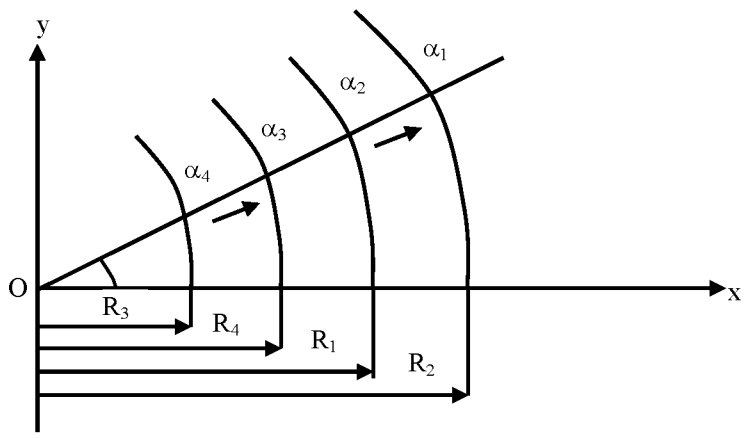

Figure 1 – The boundaries of circular orbits in Hill variables

Evolution of circular orbits on the segment [α_2, α_1] can be traced by the equation [2, p. 82]

$$w = (w_{00} + w_{02}k^2) + (w_{12}k^2 + w_{14}k^4)\cos 2\psi + w_{24}k^4 \cos 4\psi , \tag{11}$$

where

$$w_{00} = \alpha_2 , \quad w_{02} = \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{31}} + \frac{3}{8}\frac{\alpha_{42}^2\alpha_{32}}{\alpha_{43}} , \quad w_{12} = -\frac{\alpha_{42}\alpha_{32}}{2\alpha_{43}} , \quad w_{14} = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{42}^2}{2\alpha_{43}^2} , \quad w_{24} = -\frac{1}{4}w_{14} .$$

It follows from (11) that, as ψ increases from 0 to $\frac{\pi}{2}$ the radii of circular orbits grow continuously from R_1 to R_2. Between them there is a whole class of circular orbits. Let us call them the I-class of circular orbits. Evolution of circular orbits on the segment [α_4, α_3] can be traced by the equation [2, p. 80]:

$$w = (w_{00} + w_{02}k^2) + (w_{12}k^2 + w_{14}k^4)\cos 2\psi + w_{24}k^4 \cos 4\psi , \tag{12}$$

where

$$w_{00} = \alpha_3 , \quad w_{02} = -\frac{\alpha_{31}^2\alpha_{42}}{2\alpha_{41}\alpha_{21}} , \quad w_{12} = w_{02} , \quad w_{14} = -\frac{1}{2}\alpha_{31}^2\left(\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}\alpha_{21}}\right)^2 , \quad w_{24} = -\frac{1}{8}\alpha_{31}^2\left(\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}\alpha_{21}}\right)^2 .$$

The (12) series stops at k^4 with an error in order $O(k^5)$. With growth of ψ from 0 to $\frac{\pi}{2}$ the radii of circular orbits grow continuously from R_3 to R_4. Here there is a class of circular orbits. We call them the II-class of circular orbits.

Taking into account that w is given by formulas on intervals [2, p. 80-82]

$$\alpha_2 \le w \le \alpha_1, \quad w = \frac{\alpha_2\alpha_{31} - \alpha_3\alpha_{21}\sin^2\psi}{\alpha_{31} - \alpha_{21}\sin^2\psi}, \quad 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}, \tag{13}$$

$$\alpha_4 \le w \le \alpha_3, \quad w = \frac{\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{43}\sin^2\psi}{\alpha_{31} + \alpha_{43}\sin^2\psi}, \quad 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}, \tag{14}$$

let us check the boundaries of the circular orbits of the I and II classes.

We consider the boundaries of circular orbits of the I class:

at $\psi = 0$ from (13) we have

$$R_1 = w_1 = \frac{\alpha_2\alpha_{31}}{\alpha_{31}} = \alpha_2, \tag{15}$$

at $\psi = \frac{\pi}{2}$ we have

$$R_2 = w_2 = \frac{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3) - \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\alpha_1(-\alpha_3 + \alpha_2)}{(-\alpha_3 + \alpha_2)} = \alpha_1. \tag{16}$$

The lower boundary α_2, the upper α_1, as $\alpha_1 > \alpha_2$.

We consider the boundaries of circular orbits of the II class:
from (14) with $\psi = 0$ we get

$$R_3 = w_3 = \frac{\alpha_4\alpha_{31}}{\alpha_{31}} = \alpha_4, \tag{17}$$

at $\psi = \frac{\pi}{2}$ we have

$$R_4 = w_4 = \frac{\alpha_4(\alpha_1 - \alpha_3) + \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_3 - \alpha_4} = \frac{\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_4)}{\alpha_1 - \alpha_4} = \alpha_3. \tag{18}$$

The lower boundary α_4, the upper α_3, as $|\alpha_4| < \alpha_3$.

According to (16) the I class of circular orbits originates from α_2 and ends with the value α_1, merging into one orbit of the radius $R_2 = \alpha_1$.

According to (17) and (18) The II class of circular orbits starts from the orbit of the radius $R_3 = \alpha_4$ merging into one orbit of the radius $R_4 = \alpha_3$.

Thus, we consider the availability of 2 classes of circular orbits that are not related to each other as authentic.

As in the case of the I class, so in the case of the II class, the radii of circular orbits continuously grow and merge into one orbit, the radius of which is the largest in each of the classes.

From circular orbits in Hill variables $w = \frac{C^2}{\mu}\cdot\frac{1}{\rho}$ we proceed to actual circular orbits $\rho = \frac{C^2}{\mu}\cdot\frac{1}{w}$, then the boundaries of the orbits of the I class have the form:

$$\rho_2 = \frac{C^2}{\mu}\cdot\frac{1}{\alpha_1}, \quad \rho_1 = \frac{C^2}{\mu}\cdot\frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad \rho_1 > \rho_2,$$

with ρ_1 – the upper boundary, ρ_2 – the lower boundary of this class of circular orbits (figure 2).

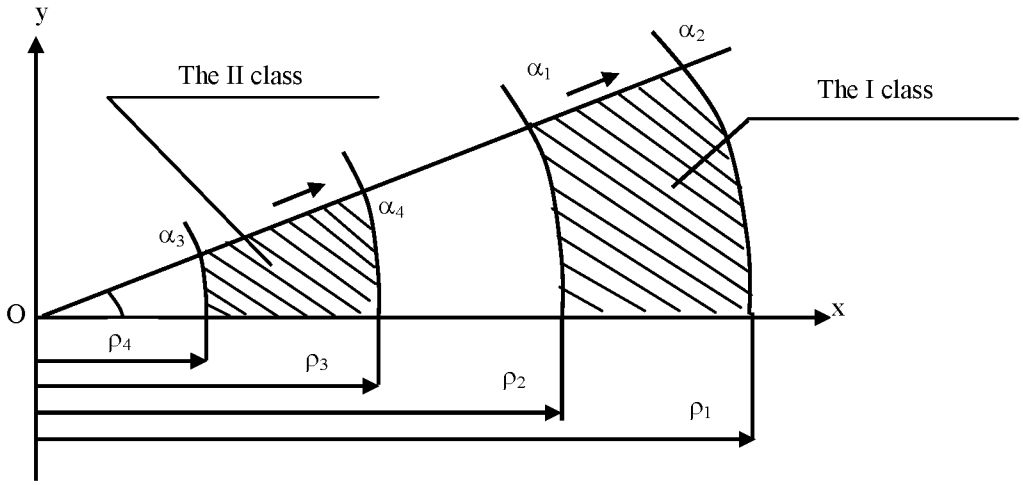

Figure 2 – The boundaries of actual circular orbits

The I class of actual circular orbits begins with ρ_2 and merge into one orbit of the radius ρ_1.

For actual circular orbits of the II class we have:

$$\rho_3 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_4}, \quad \rho_4 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_3}, \quad \alpha_3 > |\alpha_4|, \quad \rho_3 > \rho_4,$$

ρ_3 – the upper boundary, a ρ_4 – the lower boundary of this class.

Thus, The II class of actual circular orbits begins with ρ_4 , merge into one orbit of the radius ρ_3.

As ψ rises up to $\frac{\pi}{2}$ the radii of the orbits of the I class grow continuously from ρ_2 to ρ_1, similarly, the radii of the orbits of the II class increase from ρ_4 to ρ_3.

REFERENCES

[1] Schigolev B.M. O promejutochnojy orbite Hilla v Zadache treh tel // Trudy GAISH. M.: MGU im. M. V. Lomonosova, 1960. Vol. 20. P. 91-119 (in Russ).

[2] Shinibaev M.D. Postupatelnye dvigenij passivno gravitiruyoushego tela v centralnom i necentralnom pole taygotenia. Almaty: RIO VAK RK, 2001. 128 p. (in Russ).

М. Д. Шинибаев[1], А. А. Беков[1], Б. Н. Рахимжанов[1], С. Б. Момынов[1], А. Ж. Садыбек[2], Б. Т. Алимкулова[3], К. Абдрахманов[3]

[1]Национальный центр космических исследований и технологий, Алматы, Казахстан,
[2]Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан,
[3]Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВУХ КЛАССОВ КРУГОВЫХ ОРБИТ ПРОБНОГО ТЕЛА В ПЕРЕМЕННЫХ ХИЛЛА

Аннотация. В работе [1, с.119] Б.М. Щиголев исследовал плоскую вторую задачу Хилла. Для нее Хилл предложил схему силовой функции:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu r^2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \nu > 0, \quad \mu = f(m_0 + m),$$

где m_0 – масса центрального тела, m – масса пробного тела, f – постоянная тяготения.

Структура силовой функции мотивируется тем, что в плоской задаче учитывается движение перицентра (и узла в пространственной задаче).

Б. М. Щиголев, минуя общеизвестные представления о круговых орбитах во второй задаче Хилла, используя свой оригинальный способ, нашел [1, с. 98] следующие закономерности существования и эволюции круговых орбит пробного тела:

1. При $\alpha < 0{,}10546875$ существуют две круговые орбиты.
2. Эти орбиты сливаются в одну при $\alpha = 0{,}10546875$.
3. Они исчезают при $\alpha > 0{,}10546875$.

В данной статье показана справедливость этих выводов и в случае возмущенной плоской задачи Хилла. Установлено существование двух классов круговых орбит в переменных Хилла. Найдены границы этих классов, как в переменных Хилла, так и в действительных переменных. Найденные закономерности справедливы как в плоской задаче, так и в случае малого наклона орбиты к основной плоскости.

Ключевые слова: пробное тело, круговые орбиты, переменные Хилла, класс орбит, поле тяготения Хилла, спутник Земли.

Дифференциальные уравнения орбитального движения пробного тела в переменных Хилла имеют вид [1, с. 93]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 w}{d\upsilon^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{w^4}\right) w - \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} = 0, \\ &\frac{d^2 s}{d\upsilon^2} + \left(1 + \frac{\beta}{w^4}\right) s = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где переменные w, s и постоянные Хилла α, β – величины безразмерные, ϑ – истинная долгота пробного тела. Они определены формулами

$$w = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad s = \operatorname{tg} \varphi, \quad \alpha = \frac{\nu C^6}{\mu^4}, \quad \beta = \frac{(\nu - \nu')C^6}{\mu^4}, \tag{2}$$

где C – постоянная интеграла площадей, $\rho^2 = x^2 + y^2$ – проекция радиуса-вектора пробного тела на плоскость Oxy, s – тангенс широты, φ – широта пробного тела, ν и ν' – параметры, подбираемые так, чтобы получались действительные наблюдаемые движения перицентра и узла орбиты.

Истинная долгота и время связаны между собой дифференциальным уравнением

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{\rho^2}. \tag{3}$$

Разложив $\frac{1}{(1+s^2)^{3/2}}$ в биномиальный ряд по степеням s, можно убедиться в том, что (1) описывает движение пробного тела вполне адекватно при $0 \le \varphi \le 10^0$.

Уравнения первого приближения при $s \neq 0$, $s^2 \approx 0$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 w}{d\upsilon^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{w^4}\right) w - 1 = 0, \\ &\frac{d^2 s}{d\upsilon^2} + \left(1 + \frac{\beta}{w^4}\right) s = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Первое уравнение из (4) при $w = R = \text{const}$ трансформируется в уравнение круговых орбит

$$w^4 - w^3 + \alpha = 0, \tag{5}$$

так как $\frac{d^2 w}{d\upsilon^2} = 0$ и $w \neq 0$.

Это же уравнение из (4) допускает понижение порядка [1, с. 99]:

$$d\vartheta = \frac{w dw}{\sqrt{\alpha + Hw^2 + 2w^3 - w^4}}, \tag{6}$$

где $H = \frac{2hC^2}{\mu^2}$, h – постоянная интеграла энергии.

В случае кругового типа движения $\alpha > 0$, $H < 0$, $e = 0$, поэтому (6) будет иметь вид [2, с. 79]:

$$d\vartheta = \frac{w dw}{\sqrt{\alpha - Hw^2 + 2w^3 - w^4}}, \tag{7}$$

e – эксцентриситет орбиты.

Полином

$$P(w) = -w^4 + 2w^3 - Hw^2 + \alpha$$

имеет три положительных корня α_1, α_2, α_3 и один отрицательный корень α_4 и пусть

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4.$$

Действительным движениям соответствуют положительные значения полинома $P(w)$, которые реализуются на двух интервалах [2, с. 79]:

$$\text{A) } \alpha_4 < w < \alpha_3; \quad \text{B) } \alpha_2 < w < \alpha_1.$$

Рассмотрим второй интервал $\alpha_2 < w < \alpha_1$. После перехода к нормальной форме Лежандра имеем [2, с. 82]:

$$d\vartheta = \mu_0 \frac{w d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

где

$$w = \frac{\alpha_2 \alpha_{31} - \alpha_3 \alpha_{21} \sin^2 \psi}{\alpha_{31} - \alpha_{21} \sin^2 \psi}, \tag{9}$$

$$k^2 = \frac{\alpha_{43}\alpha_{21}}{\alpha_{31}\alpha_{42}}, \quad \mu_0 = \frac{2}{\sqrt{\alpha_{31}\alpha_{42}}}, \quad 0 < k < 1, \quad \alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i \quad (k, i = 1,2,3,4).$$

Первая круговая орбита видимо реализуется при $\psi = 0$, здесь из (8) и (9) имеем

$$R_1 = w_1 = \alpha_2. \tag{10}$$

Вторая круговая орбита, видимо, реализуется при $\psi = \frac{\pi}{2}$, здесь из (8) и (9) имеем

$$R_2 = w_2 = \alpha_1 .$$

причем $R_2 > R_1$. На плоскости Oxy они располагаются концентрически.

На интервале $\alpha_4 < w < \alpha_3$, видимо, аналогично имеем еще две круговые орбиты

$$R_3 = w_3 = \alpha_4 \text{ при } \psi = 0 \quad \text{и} \quad R_4 = w_4 = \alpha_3 \text{ при } \psi = \frac{\pi}{2} .$$

Совмещая центр окружностей с центром масс центрального тела, имеем 4 круговые концентрические орбиты (рисунок 1). Радиусы круговых орбит по мере роста ψ от 0 до $\frac{\pi}{2}$, растут от R_3 до R_4 и от R_1 до R_2. Действительных движений между корнями (α_3, α_2) нет, так как здесь полином $P(w) < 0$. Следует отметить, что действительные движения пробного тела существуют на интервалах (α_2, α_1) и (α_4, α_3), так как в них $P(w) > 0$.

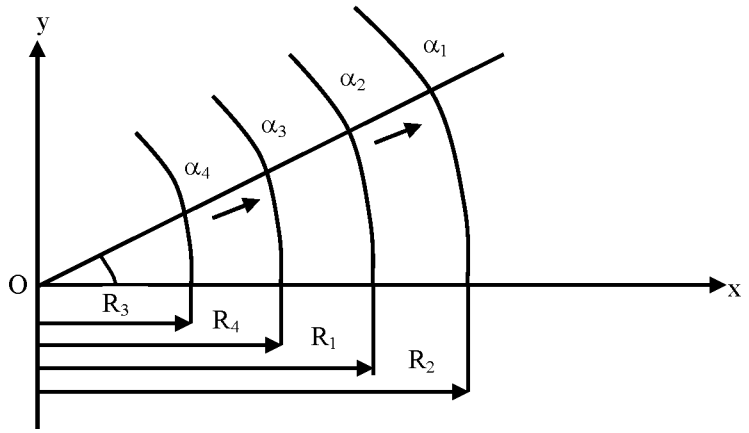

Рисунок 1 – Границы круговых орбит в переменных Хилла

Эволюцию круговых орбит на отрезке [α_2, α_1] можно проследить по уравнению [2, с. 82]

$$w = (w_{00} + w_{02}k^2) + (w_{12}k^2 + w_{14}k^4)\cos 2\psi + w_{24}k^4 \cos 4\psi , \tag{11}$$

где

$$w_{00} = \alpha_2, \quad w_{02} = \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{31}} + \frac{3}{8}\frac{\alpha_{42}^2\alpha_{32}}{\alpha_{43}}, \quad w_{12} = -\frac{\alpha_{42}\alpha_{32}}{2\alpha_{43}}, \quad w_{14} = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{42}^2}{2\alpha_{43}^2}, \quad w_{24} = -\frac{1}{4}w_{14} .$$

Из (11) также следует, что по мере роста ψ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ радиусы круговых орбит растут непрерывно от R_1 до R_2. Между ними существует целый класс круговых орбит. Назовем их I-классом круговых орбит. Эволюцию круговых орбит на отрезке [α_4, α_3] можно проследить по уравнению [2, с. 80]:

$$w = (w_{00} + w_{02}k^2) + (w_{12}k^2 + w_{14}k^4)\cos 2\psi + w_{24}k^4 \cos 4\psi , \tag{12}$$

где

$$w_{00} = \alpha_3, \quad w_{02} = -\frac{\alpha_{31}^2\alpha_{42}}{2\alpha_{41}\alpha_{21}}, \quad w_{12} = w_{02}, \quad w_{14} = -\frac{1}{2}\alpha_{31}^2\left(\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}\alpha_{21}}\right)^2, \quad w_{24} = -\frac{1}{8}\alpha_{31}^2\left(\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}\alpha_{21}}\right)^2 .$$

Ряд (12) обрывается на k^4 с ошибкой порядка $O(k^5)$. С ростом ψ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ радиусы круговых орбит растут непрерывно от R_3 до R_4. Здесь существует класс круговых орбит. Назовем их II-классом круговых орбит.

Учитывая, что w на интервалах задана формулами [2, с. 80-82]

$$\alpha_2 \le w \le \alpha_1, \quad w = \frac{\alpha_2\alpha_{31} - \alpha_3\alpha_{21}\sin^2\psi}{\alpha_{31} - \alpha_{21}\sin^2\psi}, \quad 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}, \tag{13}$$

$$\alpha_4 \le w \le \alpha_3, \quad w = \frac{\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{43}\sin^2\psi}{\alpha_{31} + \alpha_{43}\sin^2\psi}, \quad 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}, \tag{14}$$

проверим границы круговых орбит I-го и II-го классов.

Рассмотрим границы круговых орбит I-го класса:

при $\psi = 0$ из (13) получим

$$R_1 = w_1 = \frac{\alpha_2\alpha_{31}}{\alpha_{31}} = \alpha_2, \tag{15}$$

при $\psi = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$R_2 = w_2 = \frac{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3) - \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\alpha_1(-\alpha_3 + \alpha_2)}{(-\alpha_3 + \alpha_2)} = \alpha_1. \tag{16}$$

Нижняя граница α_2, верхняя α_1, так как $\alpha_1 > \alpha_2$.

Рассмотрим границы орбит II-го класса:

из (14) при $\psi = 0$ получим

$$R_3 = w_3 = \frac{\alpha_4\alpha_{31}}{\alpha_{31}} = \alpha_4, \tag{17}$$

при $\psi = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$R_4 = w_4 = \frac{\alpha_4(\alpha_1 - \alpha_3) + \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_3 - \alpha_4} = \frac{\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_4)}{\alpha_1 - \alpha_4} = \alpha_3. \tag{18}$$

Нижняя граница α_4, верхняя α_3, так как $|\alpha_4| < \alpha_3$.

В соответствии с (16) I-й класс круговых орбит берет начало с α_2 и заканчивается на значении α_1, сливаясь в одну орбиту радиуса $R_2 = \alpha_1$.

В соответствии с (17) и (18) II-ой класс круговых орбит начало берет с орбиты радиуса $R_3 = \alpha_4$ и сливаются в одну орбиту радиуса $R_4 = \alpha_3$.

Таким образом, считаем достоверным наличие 2-х классов круговых орбит, которые не связаны между собой.

Как в случае I-го класса, так и в случае II-го класса радиусы круговых орбит непрерывно растут и сливаются в одну орбиту, радиус которого наибольший в каждом из классов.

От круговых орбит в переменных Хилла $w = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}$ перейдем к действительным круговым орбитам $\rho = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{w}$, тогда границы орбит I-го класса имеют вид:

$$\rho_2 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_1}, \quad \rho_1 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \ \rho_1 > \rho_2,$$

причем ρ_1 – верхняя граница, ρ_2 – нижняя граница этого класса круговых орбит (рисунок 2).

I-й класс действительных круговых орбит начинается с ρ_2 и сливаются в одну орбиту радиуса ρ_1.

Для действительных круговых орбит II-го класса имеем:

$$\rho_3 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_4}, \quad \rho_4 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_3}, \quad \alpha_3 > |\alpha_4|, \quad \rho_3 > \rho_4,$$

ρ_3 – верхняя, а ρ_4 – нижняя граница этого класса.

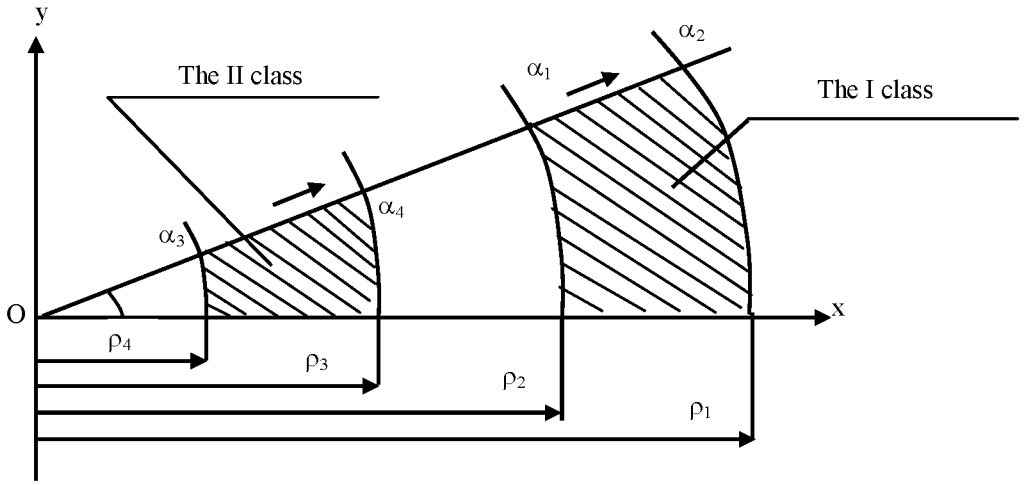

Рисунок 2 – Границы действительных круговых орбит

Таким образом, II-ой класс действительных круговых орбит начинается с ρ_4 сливаются в одну орбиту радиуса ρ_3.

По мере роста ψ от до $\frac{\pi}{2}$ радиусы орбит I-го класса растут непрерывно от ρ_2 до ρ_1, аналогично радиусы орбит II-го класса растут от ρ_4 до ρ_3.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Щиголев Б.М. О промежуточной орбите Хилла в задаче трех тел // Труды ГАИШ. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1960. – Т. 20. – С. 91-119.

[2] Шинибаев М.Д. Поступательные движения пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. – Алматы: РИО ВАК РК, 2001. – 128 с.

М. Д. Шыныбаев[1], А. А. Беков[1], Б. Н. Рахимжанов[1], С. Б. Момынов[1], А. Ж. Сәдібек[2], Б. Т. Алимқұлова[3], Қ. Абдрахманов[3]

[1]«Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы», Алматы, Қазақстан;
[2]Сыр-Дария университеті, Жетысай, Қазақстан;
[3]Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан

ХИЛЛ АЙНЫМАЛЫЛАРЫНДА СЫНАҚ ДЕНЕСІНІҢ ЕКІ ШЕҢБЕРЛІК ОРБИТАЛАР ҮЙІРІ БАР БОЛУЫ

Аннотация. Б.М. Щиголев жазықтықтағы Хилдың екінші есебін зерттеді [1, б.119]. Бұл есепте Хилл күш функциясы мына түрде берді

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}vr^2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad v > 0, \quad \mu = f(m_0 + m),$$

мұнда m_0 – орталық дененің массасы, m – сынақ денесінің массасы, f – тартылыс тұрақтысы.

Күш функциясының құрамы перицентр қозғалысын (және кеңістікте түйін қозғалысын) есепке алатын етіп алынған.

Б.М. Щиголев [1, б.98] өзінің жеке әдісін қолданып шеңберлік орбиталар туралы өте құнды мәліметтер алды:

1. $\alpha < 0{,}10546875$ болғанда екі шеңберлі орбиталар бар.

2. Олар жалғыз орбита $\alpha = 0{,}10546875$ болғанда айналады.

3. $\alpha > 0{,}10546875$ болғанда орбита жойылады.

Мақалада бұл мәліметтер орындалатындығы және шеңберлік орбиталардың бір-бірімен байланыссыз екі үйірі бар екені айтылды. Ол үйірлердің шектері табылды.

Түйін сөздер: сынақ денесі, шеңберлік орбита, Хилл айнымалылары, орбита үйірі, Хилл өрісі, Жердің жасанды серігі.