УДК 513.83

А. С. МУРАТОВ, Л. Т. ТАШИМОВ, А. М. БРЕНЕР

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И МАССЫ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ С БЫСТРОПРОТЕКАЮЩИМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

(Представлена академиком НАН РК О. С. Балабековым)

Учет времен релаксации при математическом моделировании явлений переноса представляет большой практический и теоретический интерес для расчета высокоинтенсивных, быстропротекающих процессов [1–3]. Рабочий цикл таких процессов короток, а возможности управления интенсивными процессами ограничены. Поэтому большое значение имеют правильный расчет и выбор оптимальных значений параметров.

С точки зрения моделирования задача описания таких процессов приводит к нелокальным уравнениям переноса [1–4]. Временная нелокальность процессов переноса может быть эффективно описана на основе модели релаксационных ядер переноса [4– 6]. Релаксационными ядрами переноса называются ядра интегральных преобразований, связывающих в статистической теории диссипативных процессов потоки и термодинамические силы [1, 4]. Такой подход открывает широкие возможности моделирования при минимуме феноменологических со-ображений.

Согласно методу релаксационных ядер выражения для n линейно независимых потоков массы и потока тепла в многокомпонентной системе имеют вид

$$J_i = -\sum_{k=1}^{n}\int_0^t dt_1 N_{ik}\left(R,t-t_1\right)\nabla\left(\frac{v_k\left(R,t_1\right)}{T}\right) - \int_0^t dt_1 N_{iT}\left(R,t-t_1\right)\frac{\nabla T}{T^2}, \quad (1)$$

$$J_T = -\sum_{k=1}^{n}\int_0^t dt_2 N_{Tk}\left(R,t-t_2\right)\nabla\left(\frac{v_k\left(R,t_1\right)}{T}\right) - \int_0^t dt_2 N_{TT}\left(R,t-t_2\right)\frac{\nabla T}{T^2}. \quad (2)$$

Вводя для компактности описания потенциал переноса тепла в виде $v_{n+1} = -1$, получаем единую форму для потоков массы и тепла в многокомпонент-ной системе:

$$J_i = -\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t dt_1 N_{ik}\left(R,t-t_1\right)\nabla\left(\frac{v_k\left(R,t_1\right)}{T}\right). \quad (3)$$

Отсюда следует

$$\frac{J_i}{t} = -\sum_{k=1}^{n+1}\left(\int_0^t dt_1 \frac{\partial N_{ik}\left(R,t-t_1\right)}{\partial t}\nabla\left(\frac{v_k\left(R,t_1\right)}{T}\right) + N_{ik}\left(R,0\right)\nabla\left(\frac{v_k\left(R,t_1\right)}{T}\right)\right). \quad (4)$$

Вводим обозначение для интегральных членов

$$I_{ik} = \int_0^t dt_1 N_{ik}\left(R,t-t_1\right)\nabla\left(\frac{v_k\left(R,t_1\right)}{T}\right). \quad (5)$$

Тогда получаем

$$J_i = -\sum_{k=1}^{n+1} I_{ik}. \quad (6)$$

Производные интегральных членов имеют вид

$$\frac{\partial I_{ik}}{\partial t} = N_{ik}\left(R,0\right)\nabla\left(\frac{v_k\left(R,t\right)}{T}\right) + \int_0^t dt_1 \frac{\partial N_{ik}}{\partial t}\nabla\left(\frac{v_k}{T}\right). \quad (7)$$

Для анализа структуры уравнений переноса используем сначала наиболее простой вид релаксационных ядер переноса:

$$N_{ik}\left(R,t-t_1\right) = \eta_{ik}\left(R,t\right)\exp\left(-\left(t-t_1\right)/\tau_{ik}\right), \quad (8)$$

где $\eta_{ik}\left(R,t\right)$ – некоторая локальная функция [1, 5].

Полагая $\eta_{ik}\left(R,t\right) = const$, получаем

$$\frac{\partial I_{ik}}{\partial t} = \eta_{ik}\nabla\left(\frac{v_k}{T}\right) - \frac{I_{ik}}{\tau_{ik}}. \quad (9)$$

Используя (9), в результате повторного дифференцирования (6) вплоть до производных порядка (n+1) приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^m J_i}{\partial t^m} = \sum_{s=0}^{m-1}\left(-1\right)^{s+1}\frac{\partial^{m-1-s}}{\partial t^{m-1-s}}\,\theta\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\eta_{ik}\nabla\left(v_k/T\right)}{\tau_{ik}^s}\right) + \left(-1\right)^{m+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{I_{ik}}{\tau_{ik}^m}, \quad (10)$$

где $m = 1,\ldots n+1$; $i = 1,\ldots n+1$.

Итак, для каждого компонента получаем систему $n+1$ уравнений, содержащих производные потоков до (n+1)-го порядка включительно.

Матрицы полученных систем M_i не вырождены:

$$\det M_i = \det\left(\frac{(-1)^{m-1}}{\tau_{ik}^m}\right) \neq 0 . \quad (11)$$

Поэтому из полученных систем, линейных относительно интегралов I_{ik}, можно выразить все эти интегралы через производные потоков и затем подставить полученные выражения в уравнение (6).

В итоге получаем линейное дифференциальное уравнение (n+1)-го порядка для потока каждого компонента:

$$L\left(\frac{\partial^{n+1} J_i}{\partial t^{n+1}}, \frac{\partial^n J_i}{\partial t^n}, \ldots J_i; v_1, \ldots, v_n\right) = 0 . \quad (12)$$

Используем далее законы сохранения в форме

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla \cdot J_i = 0 . \quad (13)$$

Взяв дивергенцию соотношения (12) и используя (13), получаем в итоге дифференциальное уравнение (n+2)-го порядка для потенциала каждого компонента системы:

$$L\left(\frac{\partial^{n+2}(v_i)}{\partial t^{n+2}}, \frac{\partial^{n+1}(v_i)}{\partial t^{n+1}}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial t}; v_i, .., v_n\right) = 0 . \quad (14)$$

Для инженерной практики целесообразен расчет релаксационных ядер на основе различных аппроксимаций.

В работе [4] показано, что для расчета ядер пере-носа можно использовать дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t} N(R,s) + \frac{N(R,s)}{\tau} f(R,t) = 0 , \quad (15)$$

где $f(R,t)$ – некоторая функция времени и пространственных координат; $s = \mathrm{D}t$.

Обобщение модели (15) на многокомпонентные системы можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = -N_i \tau_{ii}^{-1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} N_k \tau_{ik}^{-1} , \quad (16)$$

где в соответствии с принципом Онзагера полагаем $\tau_{ik} = \tau_{ki}$.

Так как матрица системы (16) является симметрической, все ее собственные значения вещественны. Поэтому решение (16) можно аналогично работе [5] записать в виде суммы прямой и перекрестных составляющих ядер переноса:

$$N_i = \sum_{k=1}^{n} N_{ik} , \quad (17)$$

где все слагаемые представляют собой вещественные экспоненты и $N_{ik} = N_{ki}$.

Отсюда вновь после ряда преобразований приходим к соотношению вида (14).

Нелинейное обобщение уравнений (1), (2) можно представить в виде нелокальной формы второй степени с тензорными ядрами [1, 2]:

$$J_i = -\sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t dt_1 N_{ik}^{(1)}(R, t-t_1) \cdot \nabla\left(\frac{v_k(R,t_1)}{T}\right) - \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^t dt_1 dt_2 N_{ikp}^{(2)} \theta$$

$$\theta(R; t-t_1; t-t_2) : \nabla\left(\frac{v_k(R,t_1)}{T}\right) \nabla\left(\frac{v_p(R,t_2)}{T}\right) . \quad (18)$$

В слабонелинейном приближении полагаем

$$\left\| N_{ikp}^{(2)} \right\| = \varepsilon \left\| N_{ik}^{(1)} \right\| \left\| N_{ip}^{(1)} \right\| , \quad (19)$$

где e – малый параметр.

Параметр e имеет смысл отношения двух чисел Кнудсена, рассчитанных для упругого и неупругого молекулярных столкновений соответственно [7–9]:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{Kn}_{\mathrm{in}}}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{el}}} << 1 . \quad (20)$$

Это приближение Пригожина [9], основанное на допущении, что число неупругих столкновений в единицу времени много меньше числа упругих столкновений.

Соответствующую систему модельных уравнений для релаксационных ядер в системе с перекрестными эффектами записываем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_m}{\partial t} = -N_m(1-\varepsilon_m N_m)\tau_m^{-1} + N_h(1-\varepsilon_h N_h)\tau_x^{-1}, \\ \dfrac{\partial N_h}{\partial t} = N_m(1-\varepsilon_m N_m)\tau_x^{-1} - N_h(1-\varepsilon_h N_h)\tau_h^{-1}. \end{cases} \quad (21)$$

Для упрощения анализа принимаем один порядок для обоих малых параметров $\varepsilon_m = \varepsilon_h = \varepsilon$ и, как обычно, отыскиваем решение в виде асимптотичес-

кого разложения по малому параметру. Тогда для нулевого приближения имеем линейную однородную систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_m^{(0)}}{\partial t} = -\dfrac{N_m^{(0)}}{\tau_m} + \dfrac{N_h^{(0)}}{\tau_x}, \\ \dfrac{\partial N_h^{(0)}}{\partial t} = \dfrac{N_m^{(0)}}{\tau_x} - \dfrac{N_h^{(0)}}{\tau_h}. \end{cases} \quad (22)$$

В первом приближении:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_m^{(1)}}{\partial t} = -\dfrac{N_m^{(1)}}{\tau_m} + \dfrac{N_h^{(1)}}{\tau_x} + \left[\dfrac{(N_m^{(0)})^2}{\tau_m} - \dfrac{(N_h^{(0)})^2}{\tau_x}\right], \\ \dfrac{\partial N_h^{(1)}}{\partial t} = \dfrac{N_m^{(1)}}{\tau_x} - \dfrac{N_h^{(1)}}{\tau_h} + \left[-\dfrac{(N_m^{(0)})^2}{\tau_x} + \dfrac{(N_h^{(0)})^2}{\tau_h}\right]. \end{cases} \quad (23)$$

Начальные условия

$$N_m^{(0)}(0) = N_{m0}; \quad N_h^{(0)}(0) = N_{h0};$$

$$N_m^{(1)}(0) = 0; \quad N_h^{(1)}(0) = 0. \quad (24)$$

Тогда нулевое приближение имеет вид

$$N_m^{(0)}(s) = A_1 \exp(\lambda_1 s) + B_1 \exp(\lambda_2 s), \quad (25)$$

$$N_h^{(0)}(s) = A_2 \exp(\lambda_1 s) + B_2 \exp(\lambda_2 s). \quad (26)$$

Решения первого порядка

$$N_m^{(1)}(s) = \frac{A_1^2}{2\lambda_1}(\exp(2\lambda_1 s) - 1) + \frac{B_1^2}{2\lambda_2}(\exp(2\lambda_2 s) - 1) + \frac{2A_1B_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)}(\exp((\lambda_1 + \lambda_2)s) - 1); \quad (27)$$

$$N_h^{(1)}(s) = \frac{A_2^2}{2\lambda_1}(\exp(2\lambda_1 s) - 1) + \frac{B_2^2}{2\lambda_2}(\exp(2\lambda_2 s) - 1) + \frac{2A_2B_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)}(\exp((\lambda_1 + \lambda_2)s) - 1). \quad (28)$$

Коэффициенты в уравнениях (25)–(28) определяются по формулам

$$A_1 = \frac{N_{m0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2 + \frac{1}{\tau_m}\right) + \frac{N_{h0}}{\tau_x(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

$$B_1 = -\frac{N_{m0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_1 + \frac{1}{\tau_m}\right) - \frac{N_{h0}}{\tau_x(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (29)$$

$$A_2 = \frac{N_{h0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2 + \frac{1}{\tau_h}\right) + \frac{N_{m0}}{\tau_x(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

$$B_2 = -\frac{N_{h0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_1 + \frac{1}{\tau_h}\right) - \frac{N_{m0}}{\tau_x(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (30)$$

где $s = (t - t_0) / \sqrt{\tau_m \tau_h}$.

Нелинейность и высокий порядок полученных уравнений непривычны и затрудняют их практическое использование. Вместе с тем их возможности в описании разнообразных эффектов, обусловленных нелинейностью среды и перекрестными эффектами, достаточно широки и могут послужить оправданием для дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рудяк В.Ю.* Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Наука, 1987. 272 с.

2. *Jou D., Casas-Vazquez J., Criado-Sancho M.* Thermodynamics of Fluids Under Flow. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2001. P. 231.

3. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М.: МГУ, 1964.

4. *Ким Л.А., Бренер А.М.* Временная нелокальность уравнений переноса тепла и массы в интенсивных технологических процессах // ТОХТ. 1996. Т. 30, №3. С. 258-262.

5. *Ким Л.А., Бренер А.М.* Учет перекрестных эффектов в нелокальных уравнениях переноса тепла и массы // ТОХТ. 1998. Т. 32, №3. С. 247-250.

6. *Kim L., Brener A.M., Berdalieva G.A.* The consideration of cross effects in non-local equations of heat and mass transfer. Proceedings of the 1-st European Congress on Chemical Engineering. V. 3. Florence. 1997. P.1809-1813,

7. *Brener A.M., Muratov A.S., Tashimov L.* Non-linear model of time dependent relaxation cores for the systems with cross transfer effects // Proceedings of the Advan. Comp. Methods in Heat Transfer. VIII. Lisbon. 2004. P. 321-332.

8. *Prigogine I., Mahieu M.* Sur la perturbation de la distribution de Maxwell par des reactions chimiques en phase gaseuse, 2 // Physica. V. 16, N 1. 1950. P. 51-64.

9. *Алексеев Б.В.* Математическая кинетика реагирующих газов. М.: Наука, 1982. С. 420.

Резюме

Жылу және масса тасымалдаудың көпкомпонентті жүйедегі бейжергілікті теңдеуін қорытып шығарудың, тасымалдаудың релаксациялық ядросы әдісіне негізделген және авторлар жасақтаған жаңа әдістері сипатталған.

Summary

New methods based on the relaxation transfer cores and applied to deriving non-local heat and mass transfer equations in multicomponent media have been submitted.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова;

Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Яссави

Поступила 10.06.06г.