УДК 517.53

Н. К. БЛИЕВ

СИСТЕМА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА

Выделены пространства Бесова, вложенные в класс непрерывных функций, в которых справедлива нётерова теория для систем линейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Приводятся результаты, составляющие основу такой теории в классе непрерывных (не по Гёльдеру) в терминах пространств Бесова функций.

Изучается система сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши в пространствах Бесова, вложенных в пространство непрерывных функций. Эти пространства Бесова не вложены в класс непрерывных по Гёльдеру функций и являются распадающимся банаховыми алгебрами с единицей, что представляет определенные удобства. Доказана нётеровость эллиптических систем сингулярных интегральных уравнений. Установлены справедливость формул Сохоцкого-Племеля для граничных значений интеграла типа Коши по ляпуновскому замкнутому контуру, формулы перестановки сингулярных интегралов, существующих в смысле главного значения, рассмотрены вопросы композиции и регуляризации сингулярных интегральных операторов. Такие результаты известны в классах гёльдеровых функций и позволяют в полной мере изучать краевые задачи теории функций.

Обозначим для краткости через $B(\Gamma)$ пространство Бесова $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$, 1<p<2, где Г – ляпуновский замкнутый контур из класса $C^1_\nu, \frac{2}{p}-1<\nu\le 1$. Пусть $B_n(\Gamma)$ есть множество всех n-мерных векторов с компонентами из $B(\Gamma)$, а $B_{n\times n}(\Gamma)$ множество всех квадратных матриц порядка n с элементами из $B(\Gamma)$. Заметим, что $B(\Gamma)$ вложено в пространство непрерывных на Г функций $C(\Gamma)$ и является коммутативной банаховой алгеброй с обычными операциями сложения и умножения. Множество $B_n(\Gamma)$ можно снабдить нормой, взяв, в качестве нормы вектора $X=(x_1,...,x_n)$ сумму норм отдельных компонент:

$$\|X\|=\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_{B(\Gamma)}.$$

При этом норму матрицы $A=\{a_{jk}\}_1^n\in B_{n\times n}(\Gamma)$ можно определить, например, соотношением

$$\|A\|=n\max_{j,k}\|a_{jk}\|_{B(\Gamma)}.$$

Тогда пространство $B_{n\times n}(\Gamma)$ с этой нормой также будет банаховой алгеброй.

Пусть $L(B)$ – множество всех непрерывных линейных операторов в $B(\Gamma)$, тогда каждый оператор $A\in L(B_n)$ можно трактовать как матрицу $A=\{a_{jk}\}_1^n$, в которой $a_{jk}\in L(B)$. При этом матричный оператор A вполне непрерывен тогда только тогда, когда вполне непрерывны все операторы умножения на a_{jk} в $B(\Gamma)$.

Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений в матричной записи:

$$(Lf)(t)=A(t)f(t)+$$
$$+\frac{B(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-t}+(Tf)(t)=g(t),\quad t\in\Gamma,\quad (1)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – заданные матрицы-функции из $B_{n\times n}(\Gamma)$, T – вполне непрерывный оператор в $L(B_n)$, а $g(t)$ – заданный вектор, $f(t)$ – искомый вектор из $L(B_n)$.

Матрица

$$L(t,\theta)=A(t)+\theta B(t)\qquad (t\in\Gamma,\ \theta=\pm1)$$

называется символом определенного уравнения (1) оператора L в пространстве $B_n(\Gamma)$. Считаем, что $L(t,\theta)\ne 0$ на Г, т.е. L есть эллиптический оператор.

Ограниченность сингулярного интегрального оператора L из (1) видна из следующей теоремы [1], которую для удобства приведем в полной формулировке, остановимся и на некоторых следствиях (в скалярном случае), которые используются в дальнейшем.

1^0. **Теорема.** Пусть G есть область комплексной плоскости E, ограниченная замкнутым ляпуновским контуром $\Gamma \in C^1_\nu$, $0<\nu\le 1$. Пусть $f(t)$ принадлежит пространству Бесова $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$, где p, θ, r удовлетворяют одному из условий:

$$а)\quad 1<p<2,\quad \theta=1,\quad r=\frac{1}{p},$$

$$б)\quad 1<p<2,\quad \theta\ge 1,\quad r>\frac{1}{p},$$

$$в)\quad p\ge 2,\quad \theta\ge 1,\quad r>1-\frac{1}{p}.$$

При этом считаем выполненным неравенство $r+\frac{1}{p}-1<\nu\le 1$. Тогда интеграл типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-z},\quad z\in G, \tag{2}$$

как функция z принадлежит $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$, $\alpha=r+\frac{1}{p}-1$, притом

$$\|\Phi(z)\|_{B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)}\le M\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\Gamma)}, \tag{3}$$

Заметим, что в случаях б) и в) теоремы пространство $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ вложено в класс непрерывных по Гёльдеру функций $C_\mu(\Gamma)$ при некотором $0<\mu\le 1$. Полная теория уравнения (1) в $C_\mu(\Gamma)$ имеется в [2] и [3].

В случае а) $1<p<2$, $B^r_{p,\theta}(\Gamma)=B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$ вложено в пространство непрерывных функций $C(\Gamma)$, но не вложено в $C_\mu(\Gamma)$, ни при каком $0<\mu\le 1$. При этом $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)=B^{\frac{2}{p}}_{p,1}(G)\subset C(\overline{G})$, но не вложено в $C_\nu(\overline{G})$, $0<\nu\le 1$.

Этот результат представляется интересным, поскольку как известно, интеграл типа Коши с произвольной непрерывной плотностью, вообще говоря, не является непрерывной функцией в замкнутой области $\overline{G}$.

Функция $\Phi(z)\in B(G)$, $(B(G)\equiv B^{1+\alpha}_{p,1}(G)$, $1<p<2$, $\alpha=\frac{2}{p}-1)$ из (2) имеет след в $B(\Gamma)$ [4], который является сужением $\Phi(z)$ на Γ по непрерывности, т.е. совпадает с ее угловым граничным значением изнутри G:

$$\Phi^+(t)=\lim_{z\to t\in\Gamma}\Phi(z).$$

Притом, учитывая (3), имеем:

$$\|\Phi^+(t)\|_{B(\Gamma)}\le M_1\|\Phi(z)\|_{B(\Gamma)}\le M_2\|f\|_{B(\Gamma)}. \tag{4}$$

Следовательно, существует (в смысле главного значения) сингулярный интеграл [5]:

$$Sf=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-t},\quad (t\in\Gamma), \tag{5}$$

а для граничных значений на Γ интеграле (2) $\Phi+(t)$ и $\Phi-(t)$ (соответственно изнутри G и извне) справедливы формулы Сохоцкого-Племеля

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}Sf,$$

$$\Phi^-(t)=-\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}Sf. \tag{6}$$

При этом, из (6) следует:

$$\|Sf\|_{B(\Gamma)}\le M\|f\|_{B(\Gamma)}. \tag{7}$$

2^0. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ принадлежат пространству $B(\Gamma)$. Тогда имеет место следующая формула перестановки интегралов [6]:

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\psi(\tau_1)d\tau_1}{\tau_1-t}=$$

$$=\varphi(t)\psi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\psi(\tau_1)d\tau_1\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)(\tau-\tau_1)},$$

которую удобнее записать в виде:

$$S(\varphi S\psi)+S(\psi S\varphi)=\varphi\psi+S\varphi S\psi. \tag{8}$$

Из (8), в частности, (при $\psi=1$), следует важное соотношение

$$S^2=J, \tag{9}$$

где J – тождественный оператор в $B(\Gamma)$.

3^0. **Лемма 1.** Интегральный оператор (коммутатор)

$$S^u f = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\tau)-u(t)}{\tau - t} f(\tau)d\tau,$$

где $u(t)$ произвольная заданная (непрерывная) функция из $B(\Gamma)$, вполне непрерывен в $B(\Gamma)$ [6].

4^0. В дальнейшем важную роль будут играть операторы

$$P = \frac{1}{2}(J+S) \text{ и } Q = \frac{1}{2}(J-S),$$

которые непрерывны в $B(\Gamma)$, (см. (7)). Ясно, что $P + Q = J$. Из (6) и (9) следует, что

$$P^2 = P, \quad Q^2 = Q, \ PQ = QP = 0. \qquad (10)$$

Таким образом, P и Q есть взаимно дополнительные проекторы в банаховом пространстве $B(\Gamma)$.

Обозначим через $G^+ = G$, а через $G^- = E - \overline{G}^+$. Считаем, что $0 \in G^+$, $z = \infty \in G^-$. Тогда из равенств (6) и свойств интеграла типа Коши следует, что оператор $P(Q)$ проектирует пространство $B(\Gamma)$ на подпространство $B^+(\Gamma)$ $(B^-(\Gamma))$ всех функций из $B(\Gamma)$, допускающих аналитическое продолжение в область G^+ $(G^-$ и обращающихся в нуль на бесконечности), т.е. для функций $f \in B^+(\Gamma)$ $(f \in B^-(\Gamma))$ интеграл типа Коши (2) имеет граничные значения

$$\Phi^+(t) = f(t) \qquad (\Phi^-(t) = -f(t)).$$

Это значит, что если $f \in B^+(\Gamma)$ $(f \in B^-(\Gamma))$, то выполняется равенство

$$Sf = f \qquad (Sf = -f), \qquad (11)$$

и обратно, если имеет место (11), то в силу (6) получаем

$$f \in B^+(\Gamma) \ (f \in B^-(\Gamma)).$$

5^0. Примем обозначение $[S,u] = S^u$ коммутатора из п. 3^0. Заметим, что $[S,u] = 2[P,u]$. Следовательно, при любой заданной $u(t) \in B(\Gamma)$ коммутатор $[P, u]$ вполне непрерывен в $B(\Gamma)$ (лемма 1). Тогда из легко проверяемых соотношений (см. (10))

$$[Q,u] = [u,P], \quad PuQ = P[u,Q] = [P,u]Q$$

следует полная непрерывность операторов

$$[Q,u], PuQ, QuP.$$

Лемма 2. Если f и g принадлежит $B^\pm(\Gamma)$, то $fg \in B^\pm(\Gamma)$ [6].

6^0. Каждая функция $a(t) \in B(\Gamma)$, $a(t) \neq 0$ на Γ допускает факторизацию [7]:

$$a(t) = a^-(t)t^k a^+(t), \qquad t \in \Gamma, \qquad (12)$$

где $a^\pm(t) \in B^\pm(\Gamma)$. Притом $a^+(z) \neq 0$ $(z \in G^+)$, $a^-(z) \neq 0$ $(z \in G^-)$, $k = \frac{1}{2\pi i}[\ln a(t)]_\Gamma$ – индекс функции $a(t)$.

Соотношению (12) удовлетворяют, например, функции

$$a^\pm(t) = \exp^{\pm\Gamma(z)}$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln[\tau^{-k}a(\tau)]d\tau}{\tau - z},$$

есть интеграл типа Коши.

7^0. Матричное уравнение (1) запишем в следующем виде

$$L = CP_1 + DQ_1 + T,$$

где C и D – операторы умножения в $B_n(\Gamma)$ соответственно на матричные функции $C(t) = A(t) + B(t)$ и $D(t) = A(t) - B(t)$, $S_1 = \{S\delta_{jk}\}_1^n$, $P_1 = \frac{1}{2}(I + S_1), Q_1 = \frac{1}{2}(I - S_1)$. Здесь S – скалярный сингулярный оператор (5), I – единичный оператор в $B_n(\Gamma)$, δ_{jk} -символ Кронекера. Операторы вида L образуют алгебру [6].

Введем обозначения

$$\alpha(L) = \dim\ker L \text{ и } \beta(t) = \dim co\ker L.$$

Упорядоченная пара чисел $\alpha(L), \beta(L)$ называется d – характеристической оператора L. Если из чисел $\alpha(L)$ и $\beta(L)$ хотя бы одно конечно, то разность $ind\, L = \alpha(L) - \beta(L)$ называется индексом оператора L.

Говорят, что оператор L имеет конечную d – характеристику или конечный индекс, если оба числа $\alpha(L)$ и $\beta(L)$ конечны.

Замкнутый нормально разрешимый оператор L называется нетеровым или F-оператором, если его d – характеристика конечна, и полунетеровым, если хотя бы одно из чисел $\alpha(L)$ и $\beta(L)$ конечно. В случае полунетеровости мы будем различать F_+-операторы ($\alpha(L)<\infty$) и F_--операторы ($\beta(L)<\infty$). Множество всех F-($F_\pm$-) операторов в $B_n(\Gamma)$ обозначим через $F(B)$ ($F_\pm(B)$).

Следующее важное утверждение является непосредственным следствием результатов Пресдорфа ([3], с.302).

Теорема 1. Для того, чтобы оператор $A\in L(B_n)$ был F_+ (F_-) оператором, необходимо и достаточно, чтобы $\det A$ был F_+ (F_-) оператором.

8^0. Правой факторизацией для всюду на Г неособенной матрицы $A(t)\in B_{n\times n}(\Gamma)$ называется представление её в форме

$$A(t)=A_-(t)D(t)A_+(t), \qquad (t\in\Gamma), \qquad (13)$$

с диагональной матрицей $D(t)$ вида

$$D(t)=\left\{t^{kj}\delta_{jk}\right\}_1^n \qquad (t\in\Gamma).$$

Здесь $k_1\ge k_2\ge\ldots\ge k_n$ – некоторые целые числа и $A_\pm(t)$ – квадратные матрицы порядка n, допускающие продолжения, аналитические в областях $G_\pm$ и непрерывные в $\overline{G_\pm}$, причем

$$\det A_+(z)\ne o,\ (z\in\overline{G_+}),\quad \det A_-(z)\ne o,\quad (z\in\overline{G_-}).$$

Факторизация матрицы $A(t)$, получающаяся, если поменять местами множители $A_\pm(t)$ в (13), называется левой факторизацией. Очевидно, каждая правая (левая) факторизация матрицы $A(t)$ порождает левую (правую) факторизацию транспонированной матрицы $A'(t)$, а также обратной матрицы $A^{-1}(t)$. Числа $k_j=k_j(A)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ однозначно определяются матрицей $A(t)$.

$B(\Gamma)$ – распадающаяся R-алгебра (см.п. 4^0), следовательно, каждая неособенная матрица $A(t)\in B_{n\times n}(\Gamma)$ допускает правую (левую) факторизацию ([3], с.309).

Теорема 2. Оператор

$$L=CP_1+DQ_1+T$$

из $L(B_n)$ тогда и только тогда является F_+ (F_-) – оператором, когда

$$\det C(t)\ne o,\ \det D(t)\ne o\ (t\in\Gamma) \qquad (14)$$

Если эти условия выполнены, то $R=C^{-1}P+D^{-1}Q$ есть двухсторонний регуляризатор оператора L.

Доказательство. По лемме 1 все коммутаторы вида $Pa_{jk}-a_{jk}P$, где $a_{jk}\in B(\Gamma)$ $(j,k=1,2,\ldots,n)$ вполне непрерывны. Следовательно, имеем, что

$$\det L=C_1P+D_1Q+T_1,$$

где $C_1=\det C(t),\ D_1=\det D(t),\ P,Q$ – проекторы из п.4^0, T_1 – вполне непрерывный оператор в $B(\Gamma)$. Тогда согласно п. 6^0 получим, что

$$D_1^{-1}(t)C_1(t)=a_-(t)t^k a_+(t),$$

где

$$a_\pm(t)\in B^\pm(\Gamma),\quad a_+(z)\ne 0\quad (z\in\overline{G_+}),$$

$$a_-(z)\ne 0\quad (z\in\overline{G_-}),\ \ k=ind\left(D_1^{-1}C_1\right).$$

Поэтому, учитывая п. 4^0 имеем, что

$$\det L=D_1\left(D_1^{-1}C_1P+Q\right)+T_1=$$

$$=D_1a_-(t^k a_+P+a_-^{-1}Q)+T_1=$$

$$=D_1a_-(t^kP+Q)(a_+P+a_-^{-1}Q)+T_1.$$

Здесь операторы D_1a_- и $a_+P+a_-^{-1}Q$ обратимы, t^kP+Q обратим слева при $k\ge 0$, обратим справа при $k\le 0$. Таким образом, L есть F_+-оператор, если $k\ge 0$, F_--оператор, если $k\le 0$.

Если условие (14) не выполняется, то L не является ни F_+-, ни F_--оператором ([3], с.67).

Вторая часть теоремы является прямым следствием п.п. 3^0 и 5^0. Из теоремы 2 следует, что при выполнении условия (14), оператор L, т.е. эллиптическое сингулярное уравнение (1) нетеров.

Если выполнено условие (14), то, как выше указано, матрица $D^{-1}(t)C(t)\in B_{n\times n}(\Gamma)$ допускает правую факторизацию

$$D^{-1}(t)C(t) = C_{-}(t)U(t)C_{+}(t), \quad U(t) = \left\{t^{k_j}\delta_{jk}\right\}_1^n . \quad (15)$$

Теорема 3. Пусть выполнено условие (14). Тогда если уравнение

$$(CP_1 + DQ_1)f = g \quad (g \in B_n(\Gamma)) \qquad (16)$$

разрешимо, то его решение дается формулой

$$f = (CP_1 + DQ_1)^{[-1]}g$$

в которой $(CP_1 + DQ_1)^{[-1]} = (C_{+}^{-1}P_1 + C_{-}Q_1)\times$ $\times(U^{[-1]}P_1 + Q_1)C_{-}^{-1}D^{-1}$ есть левый или правый обратный оператор к $CP_1 + DQ_1$ в зависимости от $k \geq 0$ или $k \leq 0$ соответственно.

Доказательство. В силу (15) имеем

$$CP_1 + DQ_1 = DC_{-}(UP_1 + Q_1)(C_{+}P_1 + C_{-}^{-1}Q_1) .$$

Оба внешних оператора в правой части этого равенства непрерывно обратимы, а $UP_1 + Q_1$ обратим слева при $k \geq 0$, обратим справа при $k \leq 0$.

Так как $(CP_1 + DQ_1)(CP_1 + DQ_1)^{[-1]}\times$ $\times (CP_1 + DQ_1) = CP_1 + DQ_1$, то получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блиев Н.К.* Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах. Алма-Ата, 1985. Переведена на английский язык с дополнительной главой: Bliev N.K. Generalized analytic functions in fractional Spaces. USA, Addison Wesley longman inc.,1997.

2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М.: Наука, 1968.

3. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979.

4. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения М.: Наука-ФМЛ, 1996.

5. *Привалов И.И.* Граничные значения однозначных аналитических функций. М.: Наука, 1950.

6. *Блиев Н.К.* Сингулярные интегральные операторы с ядром Коши в дробных пространствах // Сиб. мат. журнал. 2006. Т. 47, №6. С. 37-45.

7. *Абитбеков И.А., Блиев Н.К.* О разрешимости обобщенной задачи Римана-Гильберта для многосвязных областей в дробных пространствах // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1983. Т. 3. С. 1-4.

Резюме

Коши ядролы ерекше сызықтық интегралдық теңдеулер жүйелері Нетерше шешілетін Бесов кеңістігі бөлініп алынған. Ол кеңістіктер үзіліссіз функциялар кеңістігінің ішінде жатыр, бірақ Гельдерше үзіліссіз емес. Қарастырылған жүйелер үшін Бесов кеңістіктеріндегі Нетер теориясының толық негізі болатын нәтижелер алынған.

Summary

In the paper the properties of Cauchy type integrals an corresponding of singular integrals with Cauchy kernel along Lyapunov's contour are studied in the classes of continuous (not exactly Holder-continuous) functions in terms of the Besov spaces. For corresponding system of singular integrals equations Noether's theorems are established.

Институт математики МОН РК *Поступила 2.08.07г.*