АСТРОФИЗИКА

УДК 524.8

Л. М. ЧЕЧИН, Ш. Р. МЫРЗАКУЛ

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ БАРИОННОЙ МАТЕРИИ В ОЧЕНЬ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ НЕСТАЦИОНАРНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

(Представлена академиком НАН РК Т. Б.Омаровым)

Исследован рост плотности возмущений в барионном субстрате, обусловленный нестационарным характером уравнения состояния небарионной материи в очень ранней Вселенной. Показано, что при таком подходе они эволюционируют быстрее, чем в рамках стандартной космологической модели Фридмана.

Введение. Согласно стандартному космологическому сценарию [1] Вселенная изначально состояла из довольно однородной смеси частиц и излучения. При этом распределение вещества оставалось в основном равномерным. Позднее наступил этап формирования неоднородностей, т. е. возникновения флуктуаций, эволюция которых привела к образованию галактик и других космических структур.

Вопросам эволюции флуктуаций барионной материи посвящена значительная литература (см., например, [2]), но физическая причина их роста до конца не исследована. Дело заключается в том, что традиционный подход к этой проблеме основан на изучении гравитационной неустойчивости барионного вещества во Вселенной. Однако наблюдательные данные последнего десятилетия убедительно доказали существенное количественное превосходство во Вселенной небарионного вещества над барионным [3].

Поэтому возникает естественный вопрос о том, может ли сама небарионная материя (например, темная энергия) явиться причиной образования космических структур во Вселенной? Различные аспекты этой проблемы были рассмотрены в работах [4]. Среди них важное место занимает анализ антигравитационной – в частности, вакуумной – неустойчивости барионного космологического субстрата. При этом в статьях [5] было показано, что вакуум сам может порождать объекты типа карликовых галактик.

Целью настоящей работы является продолжение исследований по развитию возмущений барионного субстрата, обусловленных небарионной материей. Конкретно – здесь речь идет об анализе роста возмущений барионной материи в ходе эволюции Вселенной с нестационарным уравнением состояния.

Нестационарное уравнение состояния небарионной материи, по-видимому, впервые было введено в [6]. Его физический смысл заключается в том, что свойства небарионной материи, как представляется, также должны меняться вместе с эволюцией Вселенной. При этом состояние небарионной материи, видимо, уже становится отличным от чисто вакуумного, а на самых ранних этапах развития Вселенной допускает приближение к фантомной темной энергии [7].

Влияние нестационарного уравнения состояния на эволюцию структур во Вселенной было рассмотрено, например, в недавней работе [8]. В ней для шести типов нестационарных уравнений состояния численным методом проанализирован рост ее возмущений на фоне темной материи, описываемой относительной плотностью $\Omega_D = 0.3$. Общий результат заключается в том, что хотя возмущения плотности барионной материи растут, но они растут медленнее, чем масштабный фактор. Поэтому отношение $\dfrac{\delta(t)}{a(t)} < 1$ (в единицах г/см^4).

В нашей статье, в отличие от цитированной работы [8], используется лишь один вид нестационарного уравнения состояния. При этом применяется общий вид уравнения, описывающего эволюцию возмущений только в случае светящейся – барионной – материи*. Кроме того, мы учитываем факт, что в процессе эволюции Вселенной меняется уравнение состояния не только

*Присутствием темной материи мы пренебрегаем.

небарионной, но и барионной материи. И, наконец, здесь дано аналитическое решение поставленной задачи, что позволяет явным образом представить временную эволюцию масштабного фактора Вселенной, а также оценить изменение плотности возмущений барионного вещества в зависимости от соотношения ее кинетической и потенциальной энергий для получения выводов космогонического характера.

Эволюция масштабного фактора. Уравнения Эйнштейна, описывающие эволюцию масштабного фактора, имеют вид [1]

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho_{nb} + 3p_{nb})a, \qquad (1)$$

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho_{nb}. \qquad (2)$$

В этой системе ρ_{nb} – плотность небарионной материи, p_{nb} – ее давление; G – гравитационная постоянная. Здесь же $H = \frac{\dot{a}}{a}$ – постоянная Хаббла, которая, как отмечалось выше, зависит от времени. Кроме того, в (2) k – кривизна пространства, принимающая три значения в зависимости от типа модели Вселенной (1 для закрытой, 0 для плоской, –1 для открытой).

Для определения того, как Вселенная эволюционирует во времени, необходимо задать уравнение состояния небарионного вещества, которое связывает между собой его плотность энергии и давление. Для адиабатических процессов во Вселенной оно задается в виде

$$p_{nb} = \omega \cdot \rho_{nb}, \qquad (3)$$

где ω – параметр состояния (постоянный в модели Фридмана). Для известных видов небарионной материи, например квинтэссенции, вакуума, фантомной энергии, он принимает значения $-1\langle\omega\langle 1/3$, -1, $\omega\langle -1$, соответственно [2].

Согласно постановке задачи мы используем параметризацию Шевалье-Поларски-Линдера [6]

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_1\left(1 - \frac{a}{a_0}\right)\frac{a}{a_0}, \qquad (4)$$

где $\omega\big|_{a=1} = \omega_0$, а $\left.\frac{d\omega}{da}\right|_{a=1} = -\omega_1$, которая описывает широкий класс нестационарных уравнений состояния. (При этом $\omega_0 = -1.3$, а ω_1 равняется 4 , либо –2).

Закон сохранения энергии, следующий из уравнений (1)–(2), можно записать в виде

$$\dot{\rho}_{nb}a^3 + 3(\rho_{nb} + p_{nb})a^2\dot{a} = 0. \qquad (5)$$

Опираясь на приведенные выше уравнения, составим следующую систему для модели плоской Вселенной -

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho_{nb} + 3p_{nb})a, \qquad (6)$$

$$\dot{\rho}_{nb}a + 3(\rho_{nb} + p_{nb})\dot{a} = 0, \qquad (7)$$

$$p_{nb} = \omega(a)\rho_{nb}. \qquad (8)$$

Решая уравнение (7) с (8), получаем

$$\rho_{nb} = \tilde{\rho}_0 x^{-3\kappa}\exp\left[\frac{3}{2}\omega_1(x-1)^2\right], \qquad (9)$$

где $x = \frac{a}{a_0}$, а $\kappa = 1 + \omega_0$ – постоянная величина. Подставим теперь (9), (8), (4) и значение $\omega_0 = -1.3$ в уравнение (6). В результате получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Cx^2\exp\left[\frac{3}{2}\omega_1(x-1)^2\right]\cdot (-3 + 3\omega_1 x - 3\omega_1 x^2), \qquad (10)$$

где $C = -\frac{4\pi}{3}G\tilde{\rho}_0$.

Для решения приведенного уравнения рассмотрим случай, когда $\frac{a}{a_0}\langle\langle 1$. Такое условие как раз выполняется в очень ранней Вселенной. Тогда (10) упрощается и записывается следующим образом

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -3Cx^2\exp\left[\frac{3}{2}\omega_1 - 3\omega_1 x\right]. \qquad (11)$$

Дифференциальные уравнения приведенного типа решаются заменой переменной [9]

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = p\frac{dp}{dx}. \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получаем дифференциальное уравнение, в котором переменные уже разделены

$$pdp = Fx^2 \exp[-3\omega_1 x]dx . \qquad (13)$$

Здесь введена новая постоянная величина $F = -3C\exp(3/2\omega_1)$. Тогда, возвращаясь к первоначальным переменным, имеем

$$\frac{dx}{\sqrt{2F\exp(-3\omega_1 x)}} = dt . \qquad (14)$$

Вычисляя квадратуры, находим решение

$$t = \frac{1}{\sqrt{2F}} \frac{2}{3\omega_1} \exp(3/2\omega_1 x) . \qquad (15)$$

Обратив (15), имеем

$$x = \frac{2}{3\omega_1} \ln\left(\frac{3\omega_1\sqrt{F}}{\sqrt{2}} t\right) . \qquad (16)$$

Если для упрощения записи ввести еще одно обозначение $\chi = \frac{3\omega_1\sqrt{F}}{\sqrt{2}}$, то выражение (16) записывается в виде

$$x = \frac{2}{3\omega_1} \ln(\chi t) . \qquad (17)$$

Дифференцируя (17) и пользуясь определением постоянной Хаббла, легко найти ее выражение

$$H = \frac{\dot{x}}{x} = \frac{1}{t\ln(\chi t)} . \qquad (18)$$

Используя явный вид переменной x, получаем зависимость масштабного фактора от времени

$$a = \frac{2a_0}{3\omega_1} \ln(\chi t) . \qquad (19)$$

Рост плотности возмущений в очень ранней Вселенной. Теперь запишем общее уравнение, описывающее эволюцию возмущений плотности барионной материи в линеаризированном виде [2],

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + (v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_b)\delta = 0 , \qquad (20)$$

где v_s – скорость звука в барионной материи, $\vec{k}$ – волновой вектор, а ρ_b – плотность барионной материи. Для дальнейшего анализа этого уравнения сделаем два замечания.

В выражении (20) в скобках присутствуют два слагаемых, первое из которых описывает внутреннюю энергию барионной материи, второе – ее внешнюю (гравитационную) энергию. При этом соотношение между этими видами энергий в ходе эволюции Вселенной меняется.

Далее, в процессе эволюции Вселенной, строго говоря, меняется не только уравнение состояния небарионной материи, но и барионной материи. Поэтому выражение для плотности барионной материи также не является постоянным, а зависит от времени.

В очень ранней Вселенной для релятивистского вещества $v_s^2 \sim 1$. Кроме того, примем, что волновой вектор, согласно выражению (19) и условию $a_0 = t_0$, уменьшается как

$$k^2 \propto a^{-2} = \frac{9\omega_1^{\,2}}{4t_0^{\,2}\ln^2\chi t} .$$

Закон сохранения (7) с учетом наличия не только небарионной, но и барионной материи, обобщается очевидным образом –

$$(\dot{\rho}_{nb} + \dot{\rho}_b)a = -3[(\rho_{nb} + \rho_b) + (p_{nb} + p_b)]\dot{a} .$$

Но так как барионное вещество и небарионная материя не взаимодействуют между собой, то входящие сюда переменные величины являются независимыми. Поэтому для барионной материи – например, релятивистского газа – получаем эволюционное уравнение

$$\dot{\rho}_b = -4H\rho_b . \qquad (21)$$

Его решение, полученное с учетом (18), имеет вид $\rho_b = \hat{\rho}_0 \sqrt[-4]{\ln\chi t}$, где $\hat{\rho}_0 = \mathrm{const}$.

Подставляя эти величины в (20), получаем дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$\ddot{\delta} + P(t)\dot{\delta} + Q(t)\delta = 0 , \qquad (22)$$

в котором

$$P(t) = \frac{2}{t\ln\chi t},$$

$$Q(t) = \frac{9\omega_1^2}{4t_0^2\ln^2\chi t} - \frac{4\pi G\hat{\rho}_0}{\sqrt[4]{\ln\chi t}} .$$

Для решения этого уравнения введем новую функцию z, связанную с δ соотношением

$$\delta = u(t)z\,. \qquad (23)$$

Согласно стандартной методике [9], продифференцируем (23) два раза и полученные значения подставим в уравнение (22). В итоге получаем выражение

$$u\ddot{z} + (2\dot{u} + P(t)u)\dot{z} + (\ddot{u} + P(t)\dot{u} + Q(t)u)z = 0\,. \quad (24)$$

Приравняем нулю коэффициент при первой производной $\dot{z}$ –

$$2\dot{u} + P(t)u = 0\,. \qquad (25)$$

Отсюда легко найти значения u, и ее производных. Подставляя их в (24) и производя необходимые преобразования, получаем следующее уравнение

$$\ddot{z} + I(t)z = 0\,, \qquad (26)$$

где $I(t) = -\frac{1}{4}P^2(t) - \frac{1}{2}\dot{P}(t) + Q(t)$ его инвариант по отношению к группе преобразований вида (23). Подставляя в него значения $P(t)$, $Q(t)$ получаем

$$\ddot{z} + \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{\ln \chi t} + t^2\left[\frac{9\omega_1^2}{4t_0^2 \ln^2 \chi t} - \frac{4\pi G\hat{\rho}_0}{\sqrt[4]{\ln \chi t}}\right]\right)z = 0\,. \qquad (27)$$

Обозначив как $\Omega(t)$ выражение в круглых скобках, получаем нелинейное уравнение Эйлера

$$\ddot{z} + \frac{\Omega(t)}{t^2}z = 0\,. \qquad (28)$$

Рассмотрим теперь поведение функции $\Omega(t)$ на временном интервале $t_1 = 10^{-36}c < t < t_2 = 10^{-6}c$, характерном в эпоху очень ранней Вселенной, и применим теорему сравнения для нахождения максимально допустимого значения z.

Выбор нижней границы обусловлен тем, что с этого момента времени $t_1 \sim 10^{-36}c$ наступает стадия рождения барионного вещества. Что касается верхней границы $t_2 = t_0 \sim 10^{-6}c$, то она задана из соображений выполнения принятого условия $\frac{a}{a_0} = \frac{t}{t_0} \langle\langle 1$, требования существования функции $\Omega(t)$ с учетом численного значения входящей в нее постоянной χ ($\chi \sim 10^{41}c^{-1}$ при $\omega_1 = 4$), а также на основании известных оценок завершения адронной эры [1].

1. Пусть имеет место условие $\frac{9\omega_1^2}{4t_0^2 \ln^2 \chi t} >> \frac{4\pi G\hat{\rho}_0}{\sqrt[4]{\ln \chi t}}$, означающее преобладание кинетической энергии барионного вещества над потенциальной энергией. Тогда, пренебрегая в круглых скобках уравнения (27) третьим слагаемым, находим, что

$$\Omega(t) = \frac{1}{\ln \chi t} + \frac{9\omega_1^2 t^2}{4t_0^2 \ln^2 \chi t}\,. \qquad (29)$$

Анализ поведения функции (29) на заданном временном интервале показывает, что она имеет на нем максимум; он находится в точке $\tilde{t} = \frac{\sqrt{2}}{3\omega_1}t_0$. Поскольку $t_0 = 10^{-6}c$, то $\tilde{t} \approx 10^{-7}c$. Подставляя все необходимые величины в (29), находим ее приближенное значение – $\Omega(\tilde{t}) \approx 10^{-2} = const_1$.

В соответствии с теоремой сравнения и общей теорией дифференциальных уравнений [9], решение уравнения Эйлера с постоянной функцией $\Omega(t)$ (для приведенного значения) можно записать в следующем приближенном виде $z = C_1 t + C_2$. Так что в силу (22)–(23) возмущающая функция эволюционирует не быстрее чем

$$\delta(t) = \frac{u_0}{\ln \chi t}(C_1 t + C_2), \qquad (30)$$

где C_1 и C_2 – постоянные величины.

2. Пусть удовлетворяется обратное условие $\frac{9\omega_1^2}{4t_0^2 \ln^2 \chi t} << \frac{4\pi G\hat{\rho}_0}{\sqrt[4]{\ln \chi t}}$, которое имеет место в случае преобладания в барионном веществе потенциальной энергии над кинетической. Тогда

$$\Omega(t) = \frac{1}{\ln \chi t} - \frac{4\pi G\hat{\rho}_0}{\sqrt[4]{\ln \chi t}}t^2\,. \qquad (31)$$

Анализ этой функции показывает, что на выбранном временном промежутке она лишь монотонно убывает. Поэтому ее максимальное значение имеет место в нижней границе интервала. Численные оценки показывают, что $\Omega(t_1) \approx 10^{-1} = const_2$.

Аналогично предыдущему случаю, находим следующее приближенное решение уравнения (28) с функцией (31) – $z = C_1 t^{0.9} + C_2 t^{-0.1}$, где C_1 и C_2 – новые постоянные величины. Стало быть, возмущение плотности барионного вещества изменяется во времени не быстрее чем

$$\delta(t) = \frac{u_0}{\ln \chi t}\left(C_1 t^{0.9} + C_2 t^{-0.1}\right). \qquad (32)$$

3. Наконец рассмотрим случай, когда имеет место соотношение $\frac{9\omega_1^2}{4t_0^2 \ln^2 \chi t} \approx \frac{4\pi G \hat{\rho}_0}{\sqrt[4]{\ln \chi t}}$. С физической точки зрения оно описывает устойчивое состояние возмущения в барионном веществе. Тогда уравнение (21)–(22) примет вид

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \ddot{\delta} + \frac{2}{t \ln \chi t}\dot{\delta} = 0. \qquad (33)$$

Его приближенное решение таково

$$\delta(t) = \delta_0 \left(\ln\left|\ln \chi t\right| + \ln \chi t\right), \qquad (34)$$

где δ_0 – постоянная величина.

Далее, требование о том, чтобы волновой вектор был пропорционален масштабному фактору, т.е. $k \propto a$, дает возможность оценить рост возмущений на масштабах горизонта. Но для того, чтобы сделать заключение о роли первичных возмущений в барионной материи для формирования объектов галактического типа, необходимо использовать условие их устойчи-вости. Другими словами, в уравнении (20) следует положить

$$v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_b = 0. \qquad (35)$$

Отсюда с учетом решения уравнения (21), находим длину волны возмущений

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \lambda_J \sqrt[8]{\ln \chi t}, \qquad (36)$$

где λ_J – длина волны Джинса. Масса же возмущения может быть оценена как

$$M(t) = \frac{4}{3}\pi \lambda(t)^3 \delta(t) \approx$$
$$\approx \frac{4}{3}\pi \lambda_J^{\,3} \delta_0 \ln\left|\ln \chi t\right| \cdot (\ln \chi t)^{\frac{3}{8}}. \qquad (37)$$

Следовательно, в начальный момент времени ($t_1 \approx 10^{-36}\,c$) затравочная масса будет иметь величину $M \approx 7M_J$, почти на порядок бóльшую массы Джинса.

Заключение. Сравнение выражений (30) и (32) показывает, что в них присутствуют как слагаемые, описывающие деградацию возмущений плотности барионной материи (второе слагаемое в (30) и первое слагаемое в (32)), так и слагаемые, описывающие их рост (первое слагаемое в (30) и второе слагаемое в (32)). При этом член $\delta(t) \propto \frac{t^{-0.1}}{\ln \chi t}$ (второе слагаемое в (32)) описывает интенсивный рост возмущений в очень ранней Вселенной.

Отсюда с учетом (19) следует, что для эпохи очень ранней Вселенной темп роста возмущений плотности барионной материи может быть и больше темпа роста масштабного фактора, т.е., в отличие от работы [8], будет выполняться соотношение $\frac{\delta(t)}{a(t)} > 1$.

Кроме того, напомним, что в рамках фридмановской космологии со стационарным уравнением состояния небарионной материи рост возмущений в барионной материи пропорционален времени в первой степени, т.е. $\delta(t) \sim t$ [2]. Поэтому предлагаемый подход удовлетворительно описывает появление и быстрый рост возмущений плотности барионной материи уже в эпоху очень ранней Вселенной.

И наконец, затравочная масса (37), в соответствии со стандартной теорией Джинса, примененной для ранней Вселенной [2, 12], оценивается несколько бóльшей величиной, а именно величиной порядка $10^5 \div 10^6 M_{\Theta}$. (Она близка к верхнему значению массы шарового звездного скопления типа M3.) Ее дальнейшая эволюция, обусловленная уже гравитационным притяжением, будет вести к образованию объектов галактического типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Linde A.* Particle Physics and Inflationary Cosmology. Harwood, Chur Switzerland, 1990.

2. *Zel'dovich Ya.B., Novikov I.D.* Relativistic Astrophysics, v. II. Univ. of Chicago Press, Chicago, 1983; *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology: Principles of the General Relativity. J.Wiley and Sons, New York, 1972.

3. *Chernin A.D.* // Physics – Uspekhi (Advances in Physics Sciences), **44**, 1099, 2001.

4. *Primak J.R.* // xxx.lanl.gov./abc/astro-ph/9707285; Viana P.T.P., Liddle A.R. // MNRAS, **281**, 323 1996; *Wang L., Steinhardt P.* // Astrophys. J. **508**, 483, 1998; *Munshi D., Porciani C., Wang Yun.* // MNRAS, **349**, 281, 2004; Percival W. J. // A&A, **443**, 819, 2005; *Nunes N.J., da Silva A.S., Aghanim N.* // A&A, **450**, 899, 2006; *Casimo Bambi.* // Phys. Rev. D., **75**, No. 8, 2007.

5. *Chechin L.M.* // Chinese Physics Letters, **23,** 2344, 2006; *Chechin L.M.* // Reports National Academy of Sciences Republic of Kazakhstan, № 4, 31, 2006, (in Russian).

6. *Chevallier M., Polarski D.* // Int. J. Mod. Phys. D, **10**, 213, 2001; *Linder E.V.* // Phys. Rev. Lett. **90**, 091301, 2003.

7. *Sahni V., Starobinsky A.* // [arXiv : astro-ph/0610026]; Int. J. Mod. Phys. D, **15**, 2105, 2006.

8. *Linder E.V., Jenkins A.* // MNRAS, **346**, 573, 2003.

9. *Stepanov V.V.* The Course of Differential Equations. M, GIFML, 1958, (in Russian); *Kamke E.* Differentialgleichungen: Losungsmethoden und Losungen. 1. Gewohliche Differentialgleichungen. B.G.Teubner, Leipzig, 1977.

10. *Liberato L., Rosenfeld R.* // J. Cosmol. Astropart. Phys. 07, 009, 2006, [astro-ph/0604071]; *Lazkoz R, Nesseris S., Perivolaropoulos L.* // J. Cosmol. Astropart. Phys. 11, 010, 2005, [astro-ph/0503230].

112 *Madau P.* // [arXiv : astro-phys.0706.0123 v.1].

Резюме

Ерте кеңістік кезіндегі бейбариондық материя жағдайындағы бейстационарлық теңдеуге негізделген бариондық материяның ұйтқуының ұлғаюы зерттелген. Бұл зерттеу барысында қалыпты космологиялық Фридман моделіне қараганда тез эволюцияланатыны көрсетілген.

Summary

The growth of a baryonic matter perturbations, that caused by nonstationary equation state of nonbarionic matter in the very early Universe, was searched. It was shown that in this case they evolving more rapidly than according to the standard cosmological Friedmann model.

Астрофизический институт им. В. Г. Фесенкова

Поступила 2.09.07г.