

УДК 532.517.4

Б. П. УСТИМЕНКО

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Развит приближенный метод расчета коэффициента перемежаемости в турбулентных струйных течениях, необходимый для создания математических моделей процессов переноса количества движения, тепла и массы с учетом явления перемежаемости турбулентной и не турбулентной жидкости. Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Введение. Традиционный метод построения математических моделей турбулентных течений, основанный на уравнениях Рейнольдса, не учитывает явления перемежаемости и приводит вследствие этого к значительным ошибкам в расчетах их средних и особенно пульсационных характеристик. В этой связи в настоящее время усиленно разрабатываются модели нового поколения, характерной чертой которых является учет перемежаемости турбулентной и не турбулентной жидкости во всем поле турбулентного течения. Эти модели дают возможность более детального и точного его описания за счет условных статистических моментов динамических полей перемежающихся в пространстве и времени сред [1]. В работах [2, 3] предпринято развитие статистической теории турбулентных течений в условиях перемежаемости динамических полей, получены новые уравнения для условных средних характеристик и сформулирован новый подход к построению математических моделей таких течений. Новая модель турбулентных течений была апробирована на примерах зоны смешения спутных потоков, осесимметричных струй и пристенного пограничного слоя, где было получено практически полное совпадение результатов расчетов с опытными данными [2, 4-7].

Для расчета безусловно осредненных характеристик по этой теории необходимо определение коэффициента перемежаемости γ , т.е. доли времени наблюдения турбулентной жидкости за время опыта. Проблема расчета коэффициента перемежаемости, возникшая сравнительно недавно [1], в настоящее время является одной из центральных в гидродинамике турбулентных течений.

1. Существующие способы определения коэффициента перемежаемости. Для нахождения коэффициента перемежаемости наиболее

обоснованно использовать специальное уравнение [1]. Имеющиеся, однако, численные решения уравнения для γ связаны со значительными трудностями и требуют дополнительных феноменологических гипотез замыкания, часто недостаточно корректных. В практических приложениях, связанных главным образом с расчетом течений реагирующего газа, важно иметь простой приближенный метод определения плотности вероятностей концентрации и коэффициента перемежаемости. Такой метод для основного участка струи, где вероятность появления элементов жидкости с концентрацией равной исходной концентрации на выходе из сопла крайне мала, был предложен в работе [1].

Используя равенства $\langle z^2 \rangle = \gamma \langle z^2 \rangle_t$ и подставляя в него известные зависимости $\langle z^2 \rangle = \langle z \rangle^2 + \sigma^2$, $\langle z^2 \rangle_t = \langle z \rangle_t^2 + \sigma_t^2$ с учетом $\langle z \rangle = \gamma \langle z \rangle_t$ получим:

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{\sigma_t^2}{\langle z \rangle_t^2}\right)}{\langle z \rangle^2 + \sigma^2} \langle z \rangle^2. \quad (1)$$

Здесь z – концентрация пассивной примеси, $\sigma^2 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle$ и $\sigma_t^2 = \langle (z_t - \langle z \rangle_t)^2 \rangle$ – дисперсии пульсаций концентрации, угловые скобки означают осреднение, а индекс t соответствует турбулентной жидкости. Используя далее опытные данные, приведенные в работах [1, 8], свидетельствующие о весьма слабом изменении

величины $1.04 \leq \left(1 + \frac{\sigma_t^2}{\langle z \rangle_t^2}\right) \leq 1.31$ по сечениям осесимметричной струи в спутном потоке, в следе за круглым цилиндром и др. предлагается простая формула:

$$\gamma = 1.31 \frac{\langle Z \rangle^2}{\langle Z \rangle^2 + \sigma^2}. \quad (2)$$

Эта формула рекомендуется для области течения, где $\sigma / \langle Z \rangle \geq 0.555$. В тех случаях, когда интенсивность пульсаций мала $\sigma / \langle z \rangle < 0.555$, расчет по этой формуле дает лишнее физическое смысла значение $\gamma > 1$. Такая ситуация возникает в центральной области течения вблизи оси или плоскости симметрии, где перемежаемость несущественна. В этих случаях просто принимается, что $\gamma = 1$. При практическом использовании формулы (2) необходимо знать безусловно осредненные моменты $\langle z \rangle$ и σ^2 , которые можно найти с помощью обычной полуэмпирической теории турбулентности или же из опыта. Однако, как показал анализ, для использования формулы (2) требуется повышенная точность расчетных значений $\langle z \rangle$ и σ^2 , что, как отмечалось выше, не обеспечивается полуэмпирическими теориями турбулентности и приводит к значительным не приемлемым ошибкам. В связи с этим в настоящей работе предлагается другой простой приближенный метод вычисления коэффициента перемежаемости в турбулентных струйных течениях.

2. Методика расчета коэффициента перемежаемости. Коэффициент перемежаемости пассивной примеси в турбулентном потоке определяется формулой

$$\gamma_z(z) = \frac{\tau_t}{\tau_0}. \quad (3)$$

Здесь τ_t – суммарный промежуток времени, в течение которого в данной точке пространства наблюдается вполне турбулентная жидкость за время опыта τ_0 . С другой стороны величину γ_z можно выразить через функцию плотности распределения вероятностей (ФПРВ) $P(z)$ [2]:

$$\gamma_z = P(z) dz. \quad (4)$$

Здесь следует отметить, что определение коэффициента перемежаемости через связь его с концентрацией пассивной примеси можно рассматривать лишь как первое приближение. Действительно, в общем случае коэффициенты

перемежаемости, определенные для динамического и концентрационного поля, могут отличаться друг от друга, что связано с работой сил давления, проявляющейся в первом случае и отсутствующей во втором. Как известно силы давления способствуют турбулизации динамического поля и не воздействуют на концентрационное поле. Однако, для многих случаев свободных турбулентных течений это различие пренебрежимо мало и в дальнейшем эти коэффициенты будем считать одинаковыми.

Плотность распределения вероятностей концентрации пассивной примеси будем находить для области течения, где существенна перемежаемость, т.е. на краю турбулентного потока. Вывод и решение уравнения для ФПРВ пассивной примеси для рассматриваемого течения приведен в работе [1]. Опуская детали остановимся вкратце лишь на основных моментах, вытекающих из этого рассмотрения. Уравнение для функции плотности вероятности пассивной примеси $P(z)$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + (a_1 - b_1 z)P = 0, \quad (5)$$

где $a_1 = \frac{1}{\langle N \rangle} (\langle u \rangle \nabla \gamma - \nabla(q \sigma^{-2} \langle z \rangle \gamma))$,

$$b_1 = -\frac{1}{\langle N \rangle} \nabla(q \sigma^{-2} \gamma).$$

Здесь $q = \langle (u - \langle u \rangle)(z - \langle z \rangle) \rangle$, $\langle N \rangle = \langle D(\nabla z)^2 \rangle$ – скалярная диссипация, $\sigma^2 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle$ – дисперсия. Решение уравнения (5), удовлетворяющее граничным условиям $P(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ и $P(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 1$ выражается через функцию Эйри

$$P(z) = R_1 b_1^{1/3} Ai(\chi), \quad (6)$$

где функция Эйри

$$Ai(\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + t\chi\right) dt \quad (7)$$

с аргументом

$$\chi = b_1^{1/3} \left(z - \frac{a_1}{b_1}\right). \quad (8)$$

Используя граничные условия и удовлетворяя условию нормировки функции $P(z)$ находятся

значения постоянной R_1 , параметра $a_1 b_1^{1/3} = \nu$ и b_1 :

$$R_1 = 0.785, \nu = -2.338, b_1^{1/3} = 1.788 < z >_t^{-1}$$

Перейдем теперь к расчету коэффициента перемежаемости в периферийной зоне основного участка турбулентных струйных течений. Используя равенство (4) составим отношение

$$\frac{\gamma}{\gamma_{\max}} = \gamma = \frac{P(z)dz}{(P(z))_{\max} dz}, \quad (9)$$

где $\gamma_{\max} = 1$ и $P(z)_{\max}$ – максимальные значения коэффициента перемежаемости и функции плотности распределения вероятностей, наблюдаемые в центральной области струи. Подставляя в равенство (9) выражение (6) получим:

$$\gamma = \frac{R_1 b_1^{1/3} Ai(\chi)}{R_1 b_1^{1/3} Ai(\chi)_{\max}} = \frac{Ai(\chi)}{Ai(\chi)_{\max}}. \quad (10)$$

Из формулы (7) нетрудно определить максимальное значение $Ai(\chi) = 0.536$, которое имеет место при $\chi = -1$. Тогда получим:

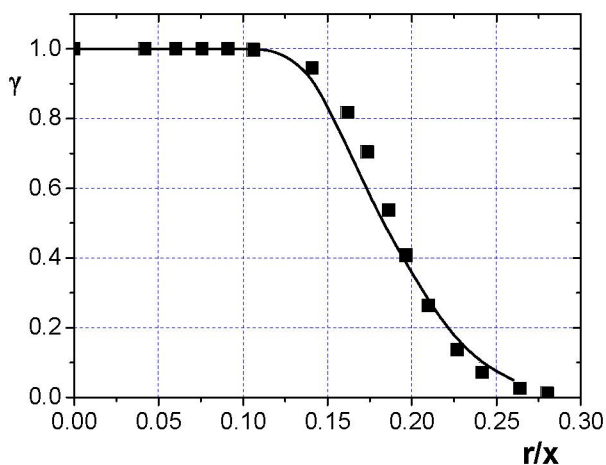


Рис. 1. Профиль коэффициента перемежаемости в свободной осесимметричной турбулентной струе. Точки – опытные данные [9], сплошная кривая – расчетная (11)

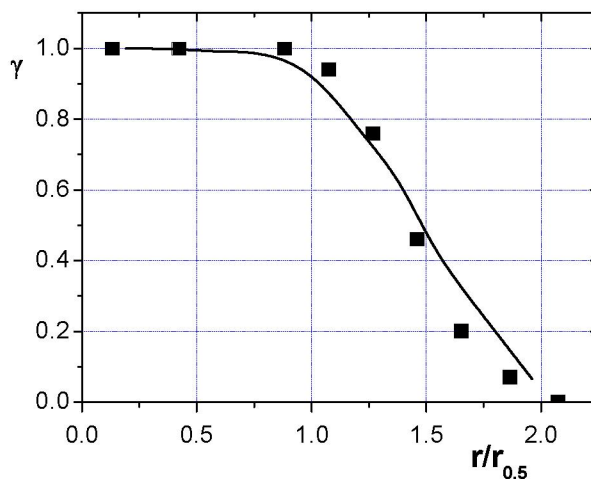


Рис. 2. Профиль коэффициента перемежаемости в осесимметричной турбулентной струе в спутном потоке. Точки – опытные данные [8], сплошная линия – расчетная

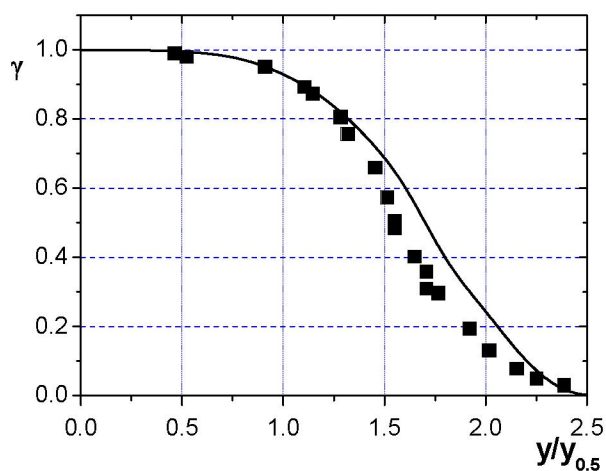


Рис. 3. Профиль коэффициента перемежаемости в свободной плоской турбулентной струе. Точки – опытные данные [10], сплошная кривая – расчетная

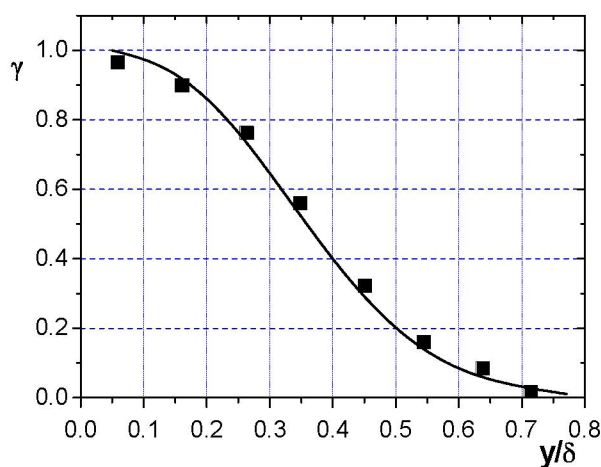


Рис. 4. Профиль коэффициента перемежаемости во внешней области турбулентного пристенного пограничного слоя. Точки – опытные данные [11], сплошная линия – расчетная

$$\gamma = \frac{Ai(\chi)}{0.536} = \frac{Ai(b_1^{1/3}z - 2.338)}{0.536}. \quad (11)$$

В точке максимального значения функции Эйри, которая соответствует глубине проникновения не турбулентной жидкости в пограничный слой, имеем:

$$-1 = b_1^{1/3}z + \nu = b_1^{1/3}z - 2.338$$

или $b_1^{1/3}z = 1.338. \quad (12)$

Для привязки полученного решения (11) к физическим координатам воспользуемся следующим приближенным приемом. Поскольку во всех экспериментальных исследованиях мы имеем дело с осредненным профилем скорости и температуры (концентрации), то для дальнейших расчетов будем использовать вместо равенства (12) его значение после проведения операции осреднения $b_1^{1/3} \langle z \rangle = 1.338.$

Подставляя сюда значение $\langle z \rangle = z_0$ на глубине проникновения не турбулентной жидкости в пограничный слой, найденное из решения уравнения теплопереноса в рамках обычной полуэмпирической теории турбулентности, определим параметр $b_1^{1/3}$. Как показал проведенный анализ значения этих величин для свободной и спутной турбулентных осесимметричных струй, плоской струи и периферийной зоны пристенного пограничного слоя соответственно равны:

$$b_1^{1/3} = 3.5967, r/x = 0.12; b_1^{1/3} = 1.6725,$$

$$r/r_{0.5} = 0.7; b_1^{1/3} = 1.376, y/y_{0.5} = 0.2$$

$$\text{и } b_1^{1/3} = 9.04, y/\delta = 0.45.$$

Здесь $y_{0.5}$ – соответствует расстоянию от оси или плоскости симметрии струи до точки, где скорость равна половине ее максимального значения, δ – условная ширина пограничного слоя. Зная значения этих параметров и расчетное (по полуэмпирическим теориям) распределение температуры (концентрации) нетрудно определить зависимость от координат величины χ , а затем и (по формуле (11)) коэффициента перемежае-

мости γ . Сопоставление результатов расчета коэффициента перемежаемости по формуле (11) с экспериментальными данными, приведенными в работах [4, 8–11], показало их хорошее согласие (смотри рис. 1–4).

Таким образом, коэффициент перемежаемости в периферийной зоне струйных течений может быть рассчитан по формуле (11) при известном из полуэмпирической теории турбулентности распределении концентрации пассивной примеси (температуры) и выбранном из условия лучшего совпадения с опытом местоположении максимального его значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. С. 288.
2. Нужнов Ю.В., Устименко Б.П. Диффузионное горение турбулентных потоков. Алма-Ата: Наука, 1993. С. 300.
3. Nuzhnov Yu.V. Conditional Averaging of Navier-Stokes Equations and a New Approach to Modelling Intermittent Turbulent Flows // J. Fluid Dynamics. 1997. V. 32, N4. P. 489-494.
4. Нужнов Ю.В., Устименко Б.П. Модель турбулентного пристенного пограничного слоя в условиях перемежаемости // Доклады НАН РК. 2001. № 2. С. 18-24.
5. Нужнов Ю.В., Устименко Б.П. Модель турбулентного пристенного пограничного слоя в условиях перемежаемости // Доклады НАН РК. 2002. № 2. С. 17-25.
6. Устименко Б.П. Условные и полные средние характеристик динамических полей свободной осесимметричной турбулентной струи // Доклады НАН РК. 2002. № 6. С. 62-68.
7. Устименко Б.П. Пульсационные характеристики осесимметричной турбулентной струи // Доклады НАН РК. 2003. № 1. С. 122-128.
8. Antonia R.A., Prabhu A., Stephenson S.E. Conditionally sampled measurements in a heated turbulent Jet // J. Fluid Mech. 1975. V. 72, part 3. P. 455-480.
9. Becker H.A., Hottel H.C., Williams G.C. The nozzle fluid concentration field of the round, turbulent, free Jet // J. Fluid Mech. 1967. V. 30, part 2. P. 285-303.
10. Jenkins P.E., Goldschmidt V.W. Conditional (point averaged) temperature and velocities in a heated turbulent plane Jet // The Physics of Fluids. 1976. V. 19, N 5. P. 613-617.
11. Kovasznay L.S.G., Kibens V., Blackwelder R.F. Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1970. V. 41, part 2. P. 283-325.

Summary

This work presents approximate method for calculation of the transmission coefficient in the turbulent jet flows. This method is the base for development of mathematical models of the momentum, heat and mass transmission processes with account of the phenomena of intermittency between turbulent and non turbulent fluid. The results of the calculations agree with experimental data.

Поступила 12.03.08г.