УДК 533+53

В.Л. САВЕЛЬЕВ, С.А. ФИЛЬКО

МЕТОД КВАЗИЧАСТИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Предложен метод моделирования газа сталкивающихся молекул конечной системой квазичастиц с переменным весом, двигающихся по гладким траекториям.

Динамика газа в кинетическом режиме описывается уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\frac{\boldsymbol{F}}{m} f = I(f,f), \qquad (1)$$

где $f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t)$ – функция распределения молекул; F – внешняя сила; m – масса молекулы; $I(f,f)$ – интеграл столкновений Больцмана[1]. Недавно [2–4] было показано, что если параметризовать двухчастичное столкновение молекул матрицей $\hat{R}$, принадлежащей группе вращений O_3^+, то интеграл столкновений естественным образом можно точно переписать в дивергентном виде:

$$I(f,\psi) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{J}(f,\psi). \qquad (2)$$

Представление интеграла столкновений в дивергентной форме, а также параметризация столкновений матрицами поворота открывают совершенно новые возможности для построения кинетических моделей с конечным числом степеней свободы на основе уравнения Больцмана. Основная трудность моделирования интеграла столкновений заключается в том, что конечные наборы скоростных пар $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k)$ в общем случае не инвариантны относительно преобразования, индуцированного столкновениями

$(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_k) \to (\mathbf{v}'_i,\mathbf{v}'_k)$. В аккуратных численных методах [5, 6] специальное внимание уделяется обходу этой проблемы и обеспечению закона сохранения энергии при столкновении, при этом приходится прибегать к некоторым приемам "размазывания" частиц по ближайшим узлам.

Начнем описание предлагаемого метода с анализа пространственно однородного уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} = I(f,f). \tag{3}$$

Основной идеей нашего подхода является представление интеграла столкновений в комбинированной форме. Очевидно, что это можно сделать благодаря соотношению (2):

$$I_{comb}(f,f) = \gamma I(f,f) - (1-\gamma)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{J}(f,f), \tag{4}$$

где $\gamma = \gamma(\mathbf{v},t)$ является произвольной функцией скорости и времени. Уравнение (3) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = I_{comb}(f,f). \tag{5}$$

Процесс дискретизации уравнения (5) начнем с разложения функции распределения по дельта-функциям

$$f(\mathbf{v},t) = \sum_{i=1}^{N} n_i(t)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_i(t)), \tag{6}$$

что соответствует замене огромного $(N_A \sim 10^{23})$ числа сталкивающихся реальных молекул конечной системой квазичастиц с переменным весом, двигающихся по плавным траекториям в фазовом пространстве. Матричные элементы оператора потока J имеют вид[2]:

$$\mathbf{J}\left(n_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_i), n_k\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_k)\right) =$$
$$= \frac{n_i n_k}{2}\int\frac{d\varphi}{\pi}d\Omega_n d\alpha(1-\cos\varphi)\varphi b(\mathrm{v}',\mu')[\mathbf{n}\cdot\mathrm{v}']\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}') =$$
$$= \int\frac{d\varphi}{\pi}d\Omega_n d\alpha\frac{n_i n_k(1-\cos\varphi)}{2}\varphi b(\mathrm{v},\mu)[\cos\alpha\varphi + (\sin\alpha\varphi)\mathbf{n}\cdot]\mathbf{n}\cdot\mathrm{v}\,\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}'), \tag{7}$$

где

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_i + \frac{\left[(1-\cos\alpha\varphi)\hat{\epsilon}^2 + (\sin\alpha\varphi)\hat{\epsilon}\right](\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_k)}{2}, \tag{8}$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}_k - \frac{\left[(1-\cos\alpha\varphi)\hat{\epsilon}^2 + (\sin\alpha\varphi)\hat{\epsilon}\right](\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_k)}{2}. \tag{9}$$

$$\mathrm{v}' = \mathbf{v}' - \mathbf{u}', \quad \mathrm{v} = \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_k, \quad \hat{\epsilon}\mathrm{v} \stackrel{df}{=} \mathbf{n}\times\mathrm{v}, \tag{10}$$

$$\mu' = \frac{\mathrm{v}'\cdot\hat{\epsilon}\mathrm{v}'}{\mathrm{v}'^2} = \mu_\alpha = \frac{\mathrm{v}\cdot\hat{\epsilon}\mathrm{v}}{\mathrm{v}^2} =$$

$$= 1 - \frac{(1 - \cos\alpha\varphi)[\mathbf{n} \times \mathbf{v}'_\alpha]^2}{\mathbf{v}'^2_\alpha} = 1 - \frac{(1 - \cos\alpha\varphi)[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2}{\mathbf{v}^2}. \quad (11)$$

Единичный вектор задает направление оси поворота; φ – угол поворота, который определяет матрица вращения $\hat{R}$; α – параметр ослабления столкновения. Остальные обозначения стандартные. Параметры столкновения меняются в следующих пределах:

$$\mathbf{n} \in \{\mathbf{n}^2 = 1\}; \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \alpha \le 1. \quad (12)$$

В аналогичных формулах [2] для интеграла столкновений Больцмана в стохастической форме $I(f,f)$ скорости после столкновения уже не зависят от параметра ослабления :

$$I\big(n_i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i), n_k\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k)\big) =$$

$$= n_i n_k \int \frac{d\varphi}{\pi} d\Omega_n (1 - \cos\varphi) b(\mathbf{v}', \mu')\big[\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') - \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i)\big] =$$

$$= n_i n_k \int \frac{d\varphi}{\pi} d\Omega_n (1 - \cos\varphi) b(\mathbf{v}, \mu)\big[\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') - \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i)\big] \quad (13)$$

где

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_i + \frac{\left[(1 - \cos\varphi)\hat{R}^2 + (\sin\varphi)\hat{R}\right](\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k)}{2}, \quad (14)$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}_k - \frac{\left[(1 - \cos\varphi)\hat{R}^2 + (\sin\varphi)\hat{R}\right](\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k)}{2}. \quad (15)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}' - \mathbf{u}' \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_k, \quad \hat{R}\mathbf{v} \overset{df}{=} \mathbf{n} \times \mathbf{v}; \quad (16)$$

$$\mu' = \frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{R}\mathbf{v}'}{\mathbf{v}'^2} = \mu = \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{R}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} =$$

$$= 1 - \frac{(1 - \cos\varphi)[\mathbf{n} \times \mathbf{v}']^2}{\mathbf{v}'^2} = 1 - \frac{(1 - \cos\varphi)[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2}{\mathbf{v}^2}. \quad (17)$$

Чтобы дискретизовать уравнение (5), заменим в (7) и (13) интегралы и суммы их монте-карловскими оценками по правилу

$$\sum_{ik} \int d\alpha \frac{d\varphi}{\pi} d\Omega_n \{\ldots\} \to \left(\sum_{ik} \int d\alpha \frac{d\varphi}{\pi} d\Omega_n\right)\left(\frac{1}{N_{coll}}\right) \sum_{coll} \{\ldots\} = \frac{4\pi N^2}{N_{coll}} \sum_{coll} \{\ldots\}, \quad (18)$$

$$\sum_{ik} \int \frac{d\varphi}{\pi} d\Omega_n \{\ldots\} \to \left(\sum_{ik} \int \frac{d\varphi}{\pi} d\Omega_n\right)\left(\frac{1}{N_{coll}}\right) \sum_{coll} \{\ldots\} = \frac{4\pi N^2}{N_{coll}} \sum_{coll} \{\ldots\}, \quad (19)$$

где $\sum\limits_{coll}\{\ldots\}$ – сумма по N_{coll} столкновениям (т.е. по наборам характеристик столкновения: $\{(i,k),\ 1\le i,k\le N\};\ \mathbf{n}\in S_2;\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\alpha\le 1)$.

Сделаем одно важное пояснение. В стандартном построении интеграла столкновений при учете столкновения двух частиц отслеживается изменение скорости только "налетающей" частицы. При этом каждая молекула один раз учитывается как "налетающая", а второй раз – как частица-"мишень". Поэтому столкновение в (18), (19) характеризуется упорядоченной парой индексов (i,k), где на первом месте стоит номер "налетающей" частицы, а на втором – номер частицы-"мишени". На основе изложенного, если быть точным, N_{coll} – это число упорядоченных столкновений, которое равно удвоенному количеству актов физического столкновения.

Разделим мысленно все пространство скоростей на ячейки Зайделя $\Delta(\mathbf{v}_j)$, $1\le j\le N$. Ячейка Зайделя $\Delta(\mathbf{v}_j)$ включает в себя все те скорости пространства скоростей, для которых узловая скорость $\mathbf{v}_j$ является ближайшей из всех узловых скоростей $\mathbf{v}_i$, $1\le i\le N$. В "приходном" члене стохастического интеграла столкновений (20) в сумме по всем столкновениям группируем столкновения, приводящие к попаданию скоростей $\mathbf{v}'$ в ячейки $\Delta(\mathbf{v}_j)$, т. е. представляем сумму в виде $\sum\limits_{coll}=\sum\limits_{j}\sum\limits_{\mathbf{v}'\in\Delta(\mathbf{v}_j)}$. Таким образом, сумма $\sum\limits_{\mathbf{v}'\in\Delta(\mathbf{v}_j)}$ включает в себя те столкновения, при которых скорость "налетающей" частицы после столкновения попадает в ячейку $\Delta(\mathbf{v}_j)$. В "расходном" же члене разделяем все столкновения на группы $\sum\limits_{coll}=\sum\limits_{j}\sum\limits_{coll(\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j)}$, в которых "налетающая" частица имеет скорость, равную $\mathbf{v}_j$. Поэтому сумма $\sum\limits_{coll(\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j)}$ включает в себя только те столкновения, при которых налетающая частица имеет выбранную скорость, равную $\mathbf{v}_j$. В результате этой процедуры приходим к выражению

$$
\begin{aligned}
I(f,f) &= \sum_{ik} I\big(n_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_i),\, n_k\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_k)\big) = \\
&= \sum_{coll}\left[n_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}'_i) - n_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_i)\right] = \\
&= -\sum_j\left[\sum_{coll(\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j)} n_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_i)\right] + \sum_j\sum_{\mathbf{v}'\in\Delta(\mathbf{v}_j)} n_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}'_i) = \\
&= -\sum_j \bar{\nu}_j n_j\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j) + \sum_j\sum_{\mathbf{v}'\in\Delta(\mathbf{v}_j)} n_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}'_i),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

где $\bar{\nu}_j$ – полная частота столкновений частицы (j) с остальными частицами:

$$\bar{\nu}_j = \sum_{coll(v_i = v_j)} \nu , \tag{21}$$

$$\nu = \nu' = \frac{4\pi N^2 n_k}{N_{coll}}(1 - \cos\varphi) b(v', \mu) = \frac{4\pi N^2 n_k}{N_{coll}}(1 - \cos\varphi) b(v, \mu). \tag{22}$$

Аналогичным образом строим выражение для потока в пространстве скоростей:

$$J(f,f) = \sum_{ik} J(n_i\delta(v - v_i), n_k\delta(v - v_k)) = \sum_{coll} a' n_i \delta(v - v') =$$
$$= \sum_j \sum_{v' \subset \Delta(v_j)} a' n_i \delta(v - v'), \tag{23}$$

где

$$a' = \frac{4\pi N^2 n_k}{N_{coll}} \frac{(1 - \cos\varphi)}{2} \varphi b(v', \mu)[n \times v'] = \hat{R}_\alpha a =$$
$$= \frac{4\pi N^2 n_k}{N_{coll}} \frac{(1 - \cos\varphi)}{2} \varphi b(v, \mu)[\cos\alpha\varphi + (\sin\alpha\varphi) n \times] n \times v. \tag{24}$$

Здесь $\hat{R}_\alpha$ – матрица поворота на уменьшенный угол $\alpha\varphi$. Произвольную функцию $\gamma(v, t)$ выбираем такой, чтобы она зависела только от времени:

$$\gamma = \gamma(t). \tag{25}$$

Объединив выражения (20) и (23), получим оценку для комбинированного интеграла столкновений:

$$\gamma I(f, \psi) - (1 - \gamma)\frac{\partial}{\partial v} \cdot J(f, \psi) =$$
$$= \sum_j \left\{ -\gamma \bar{\nu}_j n_j \delta(v - v_j) + \gamma \sum_{v' \subset \Delta(v_j)} \nu' n_i \delta(v - v') - \right.$$
$$\left. - (1 - \gamma) \sum_{v' \subset \Delta(v_j)} \frac{\partial}{\partial v} \cdot a' n_i \delta(v - v') \right\}. \tag{26}$$

Заменим суммы дельта-функций, сосредоточенных в ячейке $\Delta(v_j)$, одной дельта-функцией, сосредоточенной в ее центре v_j, введя неопределенные коэффициенты η_j и a_j:

$$-\gamma \bar{\nu}_j n_j \delta(v - v_j) + \gamma \sum_{v' \subset \Delta(v_j)} \nu' n_i \delta(v - v') -$$
$$- (1 - \gamma) \sum_{v' \subset \Delta(v_j)} \frac{\partial}{\partial v} \cdot a' n_i \delta(v - v') \approx$$
$$\approx \eta_j n_j \delta(v - v_j) - \frac{\partial}{\partial v} \cdot a_j n_j \delta(v - v_j). \tag{27}$$

Замену (27) делаем таким образом, чтобы сохранялись число частиц, импульс в ячейке $\Delta(\boldsymbol{v}_j)$ и энергия во всем пространстве скоростей. Для этого умножим обе части выражения (27) на 1 и на $\boldsymbol{v}$, а (26) на $\boldsymbol{v}^2$ и проинтегрируем по $d\boldsymbol{v}$. В результате этого получим три уравнения для трех искомых величин ν_j, α_j, γ:

$$\gamma\left(n_j\bar{\nu}_j + \sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)} n_i\nu'\right) = n_j\nu_j, \tag{28}$$

$$\gamma\left(n_j\bar{\nu}_j\boldsymbol{v}_j + \sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)} n_i\nu'\boldsymbol{v}'\right) + (1-\gamma)\sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)} n_i\alpha' = n_j\nu_j\boldsymbol{v}_j + n_j\alpha_j, \tag{29}$$

$$\gamma\sum_j\left(n_j\bar{\nu}_j\boldsymbol{v}_j^2 + \sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)} n_i\nu'\boldsymbol{v}'^2\right) + 2(1-\gamma)\sum_j\sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)} n_i\boldsymbol{v}'\cdot\alpha' =$$
$$= \sum_j\left(n_j\nu_j\boldsymbol{v}_j^2 + 2n_j\boldsymbol{v}_j\cdot\alpha_j\right) \tag{30}$$

Решив систему (28)–(30), получим выражения для искомых коэффициентов:

$$\gamma = \frac{2\sum_j\sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)} n_i(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}_j)\cdot\alpha'}{2\sum_j\sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)} n_i(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}_j)\cdot\alpha' - \sum_j\sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)} n_i\nu'(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}_j)^2}, \tag{31}$$

$$\nu_j = \gamma\left(\bar{\nu}_j + \sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)}\frac{n_i}{n_j}\nu'\right), \tag{32}$$

$$\alpha_j = \gamma\sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)}\frac{n_i}{n_j}\nu'(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}_j) + (1-\gamma)\sum_{\boldsymbol{v}'\in\Delta(\boldsymbol{v}_j)}\frac{n_i}{n_j}\alpha'. \tag{33}$$

Для удобства повторим основные обозначения для входящих в (31) – (33) величин:

$$\nu' = \nu = \frac{4\pi N^2 n_k}{N_{coll}}(1-\cos\varphi)b(\mathrm{v},\mu), \tag{34}$$

$$\bar{\nu}_j = \sum_{coll(\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_j)}\nu, \tag{35}$$

$$\alpha' = \Re_\alpha\alpha = \frac{4\pi N^2 n_k}{N_{coll}}\frac{(1-\cos\varphi)}{2}\varphi\, b(\mathrm{v},\mu)\left[\cos\alpha\varphi + (\sin\alpha\varphi)\boldsymbol{n}\times\right]\boldsymbol{n}\times\mathrm{v}, \tag{36}$$

$$\mu = \mu' = 1 - \frac{(1-\cos\varphi)[\boldsymbol{n}\times\mathrm{v}]^2}{\mathrm{v}^2}, \tag{37}$$

$$\mathrm{v} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}_k, \qquad \mathrm{v} = \mathrm{v}' = |\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}_k|. \tag{38}$$

Сумма $\sum_{\mathbf{v}'\in\Delta(\mathbf{v}_j)}$ включает в себя все те столкновения, при которых скорость налетающей частицы после столкновения попадает в ячейку $\Delta(\mathbf{v}_j)$. Сумма $\sum_{coll(\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j)}$ включает в себя только те столкновения, при которых налетающая частица имеет скорость, равную $\mathbf{v}_j$.

Таким образом, с учетом (31)–(38) имеем окончательное дискретизированное выражение для интеграла столкновений в комбинированной форме:

$$I_{comb} = \gamma I(f,f) - (1-\gamma)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\mathbf{\Omega}(f,f) = \\ = \sum_j \left[\nu_j n_j \delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\mathbf{a}_j n_j \delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j)\right] \tag{39}$$

Производная по времени от функции распределения (6) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_j \left[\dot n_j(t)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j(t)) - \dot{\mathbf{v}}_j(t)\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} n_j(t)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j(t))\right]. \tag{40}$$

Сравнивая (39) и (40), получаем искомые эволюционные уравнения для весов и узлов функции распределения (6):

$$\frac{\dot n_j}{n_j} = \frac{\partial}{\partial t}\ln n_j = \nu_j, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j, \tag{41}$$

где выражения для ν_j и $\mathbf{a}_j$ даются формулами (31)–(33). Из (41) получаем формулы пересчета весов и скоростей на временном шаге:

$$\ln n_j(t+\Delta t) = \ln n_j(t) + \nu_j \Delta t, \qquad \mathbf{v}_j(t+\Delta t) = \mathbf{v}_j(t) + \mathbf{a}_j\Delta t. \tag{42}$$

Эти формулы гарантируют сохранение положительности весов $n_j(t)$.

В случае пространственно неоднородного уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\frac{\mathbf{F}}{m} f = I_{comb}(f,f) \tag{43}$$

функцию распределения представляем в виде

$$f(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = \sum_j n_j(\mathbf{r},t)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j(\mathbf{r},t)). \tag{44}$$

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n_j(\mathbf{r},t)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j(\mathbf{r},t)) = \\ = \left(\mathbf{v}_j\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n_j\right)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j) - \\ - n_j\mathbf{v}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v}_j\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j) =$$

$$= \left[\left(v_j \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} n_j \right) + n_j \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot v_j \right) \right] \delta(v - v_j) -$$

$$- n_j v_j \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} v_j \right) \cdot \frac{\partial}{\partial v} \delta(v - v_j) \qquad (45)$$

и привлекая (40), получаем разложение для левой части уравнения (43):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} f + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{F}{m} f =$$

$$= \sum_j \left\{ \left[\dot{n}_j + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot n_j v_j \right] \delta(v - v_j) - \right.$$

$$- n_j \left[\dot{v}_j(t) + v_j \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} v_j - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{F}{m} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial v} \delta(v - v_j) \right\}. \qquad (46)$$

Сравнивая (39) и (46), получаем искомые уравнения "газовой динамики" квазичастиц:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_j + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot n_j v_j = \eta_j n_j,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_j + v_j \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} v_j = a_j + \frac{F}{m}. \qquad (47)$$

Работа выполнена в рамках проекта 221 (контракт № 8 от 2 марта 2006 г.) по программе фундаментальных исследований (шифр Ф.0351) по Государственному заказу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ferziger J.H., Kaper H.G.,* Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. North-Holland, Amsterdam, 1972.

2. *Saveliev V.L., Nanbu K.* Collision group and renormalization of the Boltzmann collision integral //Phys. Rev. 2002. E 65. 051205. P.1-9.

3. *Saveliev V.L.* A Parameterization of Collisions in the Boltzmann Equation by a Rotation Matrix and Boltzmann Collision Integral in Discrete Models of Gas Mixtures // Rarefied Gas Dynamics: 22nd Int. Symp./ Ed. by T. J. Bartel and M. A. Gallis. AIP Conf. Proc.. AIP. Melville. NY. 2001. V. 585. P.101.

4. *Saveliev V.L., Nanbu K.* Exact Forms of Representation of Boltzmann Collision Integral as a Divergence of the Flow in Velocity Space // Rarefied Gas Dynamics: 24rd International Symposium, Bari, Italy, 10-16 July 2004/ AIP Conference Proceedings. 2005. V. 762. P. 114-119.

5. *Tcheremissine F.G.* Conservative evaluation of Boltzmann collision integral in discrete ordinates approximation // Comput. Math. Appl. 1998. V. 35. P. 215-221.

6. *Raines A.* Study of a shock wave structure in gas mixtures on the basis of the Boltzmann equation // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2002. V. 21. P. 599-610.

Резюме

Тегіс траекториялармен қозғалатын, айнымалы салмақты квазибөлшектердің ақырғы жүйесімен соқтығысатын молекулалар газын модельдеу әдісі ұсынылған.

Summary

The method for gas of colliding molecules modeling by finite system of quasi-particles with variable weight moving along smooth trajectories is proposed.

Институт ионосферы МОН РК,
г. Алматы
Жетысуский государственный университет,
г. Талдыкорган