С. А. АЛДАШЕВ

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Изучены для волнового уравнения нелокальные краевые задачи, которые являются обобщениями известных многомерных задач Дарбу, предложенный М. Н. Проттером. Получен критерий однозначной разрешимости этих задач.

Пусть D – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\dots,x_m,t)$, ограниченная характеристическими конусами $|x| = t$, $|x| = 1-t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ – длина вектора $t=(x_1,\dots,x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ¶D области D, обозначим через S_0, S_1, S соответственно.

В области D рассмотрим волновое уравнение

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1,\dots,x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\dots,x_m$, t к сферическим r, Основной максимум, обусловленный вязким механизмом, реализуется на оси осевой симметрии круговой пластины, в то время как второй локальный максимум, обусловленный пластичными свойствами, реализуется в виде кругового вала.

Расчеты для неньютоновских жидкостей показали, что вид зависимостей $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{s})$ примерно такой же, как и для ньютоновских жидкостей (незначительно изменяются размеры кривой $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{s})$).

Заметим, что потеря устойчивости двухслойной круговой пластинки сопровождается образованием угловых гармоник, а это производит к тому, что возмущения не обладают осевой симмет- рией [1]. Проведенное авторами аналогичное исследование для плоского и пространственного случая показало, что реология слоев существенно влияет на зарождающее семейство диапиров. Они могут иметь самую «причудливую форму», что проявляется в неоднородном распределении диапиров по пространству и их характерных размеров.

Из приведенного краткого анализа следует, что осесимметричная потеря устойчивости приводит к формированию одиночного соляного купола или одиночного соляного купола и кругового соляного вала правильной формы. Подобные соляные структуры имеют место в верхних горизонтах земной коры, но встречаются редко.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Гарагаш И.А.* и др. Теория складкообразования в земной коре. М.: Наука, 1975. 239 с.

2. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Жантаев Ж.Ш.* Устойчивость вязкопластического течения весомой слоистой среды // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1981. №1. С. 17-23.

3. *Исмаил-заде А.Г., Биргер Б.И.* Гравитационная неустойчивость идеально пластического слоя, находящегося на слое вязкой жидкости: следствия для диапиризма // Физика Земли. 2001. №7. С. 10-17.

4. *Ержанов Ж.С., Менцель В., Бергман Э.И.* и др. Основы расчета напряженного состояния полостей – газохранилищ в соляных отложениях. Алма-Ата, 1978. 87 с.

Резюме

Осьтік симметриялы ньютондық емес созылмалы-пластикалық ортаның гравитациялық қалыпсыздығы зерттелді.

Summary

Gravitational instability of nonnewton’s viscousplastic medium with rotationally symmetry was research.

Институт механики и машиноведения им. У. А. Джолдасбекова МОН РК, г. Алматы

Поступила 05.01.07г.

УДК 517.956

С. А. АЛДАШЕВ

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Изучены для волнового уравнения нелокальные краевые задачи, которые являются обобщениями известных многомерных задач Дарбу, предложенный М. Н. Проттером. Получен критерий однозначной разрешимости этих задач.

Пусть D – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная характеристическими конусами $|x| = t$, $|x| = 1-t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ – длина вектора $t = (x_1,...,x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ¶D области D, обозначим через S_0, S_1, S соответственно.

В области D рассмотрим волновое уравнение

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m$, t к сферическим r,

$\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}$, t, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2,3,\ldots,m-1$.

Пусть $\left\{Y^k_{\eta,m}(\theta)\right\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$, $W_2^\lambda(S)$ – пространства Соболева, $\lambda = 0,1,\ldots$.

Рассмотрим следующую

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta),\ u(r/2,\theta,r/2) = \alpha \cdot u_t(r,\theta,0) + \beta(r,\theta) \tag{2}$$

или

$$u_t(r,\theta,0) = v(r,\theta),\ ru(r/2,\theta,r/2) = \alpha \cdot u(r,\theta,0) + \gamma(r,\theta),\ \alpha = const, \tag{3}$$

которая является обобщением известной многомерной задачи Дарбу, предложенной М. Н. Проттером [1].

Имеет место [2]

Лемма. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^\lambda(S)$. Если $\lambda \geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{f}^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq \lambda - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\overline{\tau}^k_n(r)$, $\overline{v}^k_n(r)$, $\overline{\beta}^k_n(r)$, $\overline{\gamma}^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $v(r,\theta)$, $\beta(r,\theta)$, $\gamma(r,\theta)$.

Введем множества

$$B^l(s) = \left\{ f(r,\theta) : f \in W_2^l(S), \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left(\left\|\bar{f}^k_n(r)\right\|^2_{C^2((0,1))} + \left\|\bar{f}^k_n(r)\right\|^2_{C([0,1])}\right) \cdot \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty, \lambda > (4+3m)/2 \right\}.$$

Имеет место

Теорема 1. Если $\tau(r,\theta)$, $v(r,\theta)$, $\beta(r,\theta)$, $\gamma(r,\theta) \in W_2^\lambda(S)$, $\lambda > (4+3m)/2$, то задача 1 при $\alpha \neq 0$ имеет единственное решение.

Пусть $\tau(r,\theta) = r\tau^*(r,\theta)$, $v(r,\theta) = rv^*(r,\theta)$, $\beta(r,\theta) = r\beta^*(r,\theta)$, $\gamma(r,\theta) = r^2\gamma^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $v^*(r,\theta)$, $\beta^*(r,\theta)$, $\gamma^*(r,\theta) \in B^l(S)$.

Тогда справедлива

Теорема 2. Задача 1 однозначно разрешима $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\alpha \neq 0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение (1) имеет вид [2]

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} = 0, \tag{5}$$

$$\delta = -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \cdot \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1,\ g_j = \left(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{j-1}\right)^2,\ j > 1.$$

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению. Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [2], получаем

$$\overline{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{n}\overline{u}_{nr}^k - \overline{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\overline{u}_n^k = 0,\ \lambda_n = n(n+m-2), \tag{7}$$

$$k = \overline{1, k_n},\quad n = 0,1,\dots .$$

Произведя замену переменной по формуле $\overline{u}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t)$ и положив затем $\xi = (r+t)/2$, $\eta = (r-t)/2$, из (7) будем иметь

$$u_{n\xi\eta}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2} u_n^k = 0. \tag{8}$$

Тогда условие (2), с учетом леммы, для функций $u_n^k(\xi,\eta)$ перепишется в виде

$$u_n^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi),\ u_n^k(\xi,0) = \alpha \cdot 2^{(1-m)/2} v_n^k(\xi) + \beta_n^k(\xi), \tag{9}$$

$$\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\overline{\tau}_n^k(2\xi),\ \beta_n^k(\xi) = \xi^{(m-1)/2}\overline{\beta}_n^k(2\xi),$$

$$v_n^k(\xi) = \left.\frac{\partial u_n^k}{\partial N}\right|_{\xi=\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left.\left(\frac{\partial u_n^k}{\partial \xi} - \frac{\partial u_n^k}{\partial \eta}\right)\right|_{\xi=\eta},\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\dots .$$

Используя общее решение уравнения (8) [3], нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (8) имеет вид

$$u_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\xi}\left[v_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1, \tag{10}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu\left[\dfrac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta) + 2(\xi_1\eta_1 + \xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения (8) [4], а $P_\mu(z)$ – функция Лежандра, $\mu = n + (m-3)/2$.

Далее из (10) при $h = 0$, учитывая условие (9), получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$v_n^k(\xi) = f_n^k(\xi) + \frac{2^{(m-2)/2}}{\alpha}\int_0^{\xi} v_n^k(\xi_1) P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1, \tag{11}$$

$$\alpha \cdot 2^{(3-m)/2} \cdot f_n^k(\xi) = \tau_n^k(\xi) + \frac{2^{(m-2)/2}}{\alpha}\int_0^{\xi} \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 - 2\beta_n^k(\xi).$$

Так как $|P_\mu(z)| \leq C = const$ [5], то уравнение имеет единственное решение [6].

Следовательно, ряд вида

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{12}$$

является решением задачи (1), (2), где функция $u_n^k(r,t)$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$ находятся из (10), в которой $v_n^k(\xi)$ определяется из уравнения (11).

Теперь рассмотрим задачу (1), (3), и ее решение также будем искать в виде (6). В этом случае краевое условие (3) имеет вид

$$\left.\frac{\partial u_n^k}{\partial N}\right|_{\xi=\eta} = v_n^k(\xi),\ \xi u_n^k(\xi,0) = \alpha \cdot 2^{(1-m)/2}\tau_n^k(\xi) + \gamma_n^k(\xi), \tag{13}$$

$$v_n^k(\xi) = \sqrt{2}(2\xi)^{(m-1)/2}\bar{v}_n^k(2\xi),\ \gamma_n^k(\xi) = \xi^{(m-1)/2}\bar{\gamma}_n^k(2\xi),\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots.$$

Далее из (10) при $\eta = 0$, с учетом условия (13), будем иметь

$$\alpha \cdot 2^{(3-m)/2}\frac{\tau_n^k(\xi)}{\xi} = \tau_n^k(\xi) - \int_0^{\xi}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 + f_n^k(\xi),$$

$$f_n^k(\xi) = \sqrt{2}\int_0^{\xi} v_n^k(\xi_1) P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 - 2\gamma_n^k(\xi).$$

Отсюда

$$\varphi_n^k(\xi) = g_n^k(\xi) + \int_0^{\xi}\varphi_n^k(\xi_1) G(\xi,\xi_1) d\xi_1, \tag{14}$$

где $\varphi_n^k(\xi) = \tau_n^k(\xi)/\xi$, $G(\xi,\xi_1) = P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) \Big/ \left(\xi - 2^{(3-m)/2}\alpha\right)$, $g_n^k(\xi) = -f_n^k(\xi) \Big/ \left(\xi - 2^{(3-m)/2}\alpha\right)$.

Так как $|P'_\mu(z)| \leq C$ ([5]), то $\max\limits_{\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left|G(\xi,\xi_1)\right| \leq C$, поэтому интегральное уравнение (14) однозначно разрешимо [6].

Таким образом, функция (12) является решением задачи (1), (3), где $u_n^k(r,t)$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$

определяются по формуле (10) при этом $\tau_n^k(\xi)$ находятся из (14).

С учетом ограничений на заданные функции $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\beta(r,\theta)$, $\gamma(r,\theta)$, аналогично [7], можно показать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ в виде (12) принадлежит искомому классу.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\alpha \neq 0$.

Так как $B^l(S) \subset W_2^l(S)$, то по теореме 1 задача 1 однозначно разрешима.

Первая часть теоремы 2 доказана.

Пусть теперь задача однозначно разрешима. Покажем, что $\alpha \neq 0$. Предположим противное, т.е. $\alpha = 0$.

В этом случае в [7,8] доказано, что задача 1 имеет бесчисленное множество решений. Это приводит к противоречию нашему предположению.

Теорема 2 установлена. Из этой теоремы вытекает следующий критерий единственности решения задачи 1: если $\tau(r,\theta)=0$, $\beta(r,\theta)=0$, $\nu(r,\theta)=0$, $\gamma(r,\theta)=0$, то решение задачи 1 $u(x,t)=0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$, которое изложено в [9].

Отметим, что задача 1 относится к классу нелокальных краевых задач и некоторые из них изучены в [8, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Protter M.H.* New voundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // Journal Rational Mech. and Analysis. 1954. V. 3, N 4. P. 435-446.

2. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

3. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.

4. *Copson E.T.* On the Riemann-Green function // J. Rational Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 324-348.

5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 1. 294 с.

6. *Смирнов М.М.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1981. Т. 4, ч. 2. 550 с.

7. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Ғылым, 1994. 170 с.

8. *Алдашев С.А.* О некоторых краевых задачах для многомерного волнового уравнения // Доклады АН СССР. 1982. Т. 265, № 6. С. 1289-1292.

9. *Алдашев С.А.* Критерий единственности решения обобщенных задач Дарбу-Проттера для многомерного волнового уравнения // Тезисы межд. конф. «Актуальные проблемы диф. уравнений и мат. физики». Алматы, 2005. С. 25.

10. *Алдашев С.А.* О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 3-8.

Резюме

Мақалада көп өлшемді толқын теңдеуіне арналған локальсыз шектік есептердің шешімдерінің бар екені және жалғыздығы критериясы алынған.

Resume

This work investigates non-local boundary-value problems for the wave equation, which are generalizations of the well-known multidimensional Darboux problems presented by M.N. Protter. The criterion of unequivocal solvability of these problems is found.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая

Поступила 17.01.07г.