УДК 621.01

Ю. М. ДРАКУНОВ, А. К. ТУЛЕШОВ, Л. И. ВОРОНКОВА

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ГАУССА (ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ)

Рассматривается новый подход к выводу дифференциальных уравнений движения плоских механизмов с одной и несколькими степенями свободы на основе принципа наименьшего принуждения Гаусса. Вариационный принцип приводит к нахождению минимума функционала, описывающего поведение динамической системы с наложенными связями.

Предложен способ получения дифференциальных уравнений с использованием вариационного принципа наименьшего принуждения, известного как принцип Гаусса [1]. Этот принцип связан с понятием экстремальности, т.е. нахождением минимума некоторого выражения, описывающего поведение рассматриваемой динамической системы с наложенными на нее склерономными связями. Физический смысл данного принципа означает, что несвободная система совершает движение, близкое к свободному [2]. Синхронное варьирование, при котором остается только ускорение $\vec{r}_{i1} = \vec{r}_{i2}$, $\vec{v}_{i1} = \vec{v}_{i2}$, $\vec{w}_{i1} \neq \vec{w}_{i2}$, называется варьированием по Гауссу.

$$\delta \vec{r}_i = \frac{1}{2}\delta \vec{w}_i (\Delta t)^2 . \tag{1}$$

Здесь Δt – малое время, $\delta \vec{r}_i$ – вариация вектора перемещения, $\delta \vec{w}_i$ – вариация вектора ускорения. Общее уравнение динамики для системы материальных точек может быть записано

$$\sum_{i=1}^{N} (\overline{F}_i - m_i \overline{w}_i)\delta \overline{r}_i = 0 . \tag{2}$$

Подставим в последнее выражение $\delta \overline{r}_i$ из формулы (1) и, сократив его на $1/2(\Delta t)^2$, получим

$$\sum_{i=1}^{N} (\overline{F}_i - m_i \overline{w}_i)\delta \overline{w}_i = 0 . \tag{3}$$

Замечая, что массы точек m_i постоянны и силы F_i не зависят от ускорения точек системы, уравнение (3) можно записать в виде

$$d\, Z = 0, \tag{4}$$

где введена величина

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\overline{w}_i - \frac{F_i}{m_i} \right)^2 , \tag{5}$$

называемая *принуждением* или *мерой принуждения*.

Рассмотрим некоторый плоский механизм, состоящий из N подвижных звеньев с одной обобщенной координатой q. На рис., а изображено i-е подвижное звено механизма в некоторой прямоугольной системе координат xOy. Движение звена в плоскости известно, т.е. задано движение центра масс $S_i(x_i, y_i)$ и угол поворота, например

$$x_i = x_i(q), \quad y_i = y_i(q), \quad \varphi_i = \varphi_i(q) . \tag{6}$$

Согласно принципу Гаусса для нашего механизма можно записать

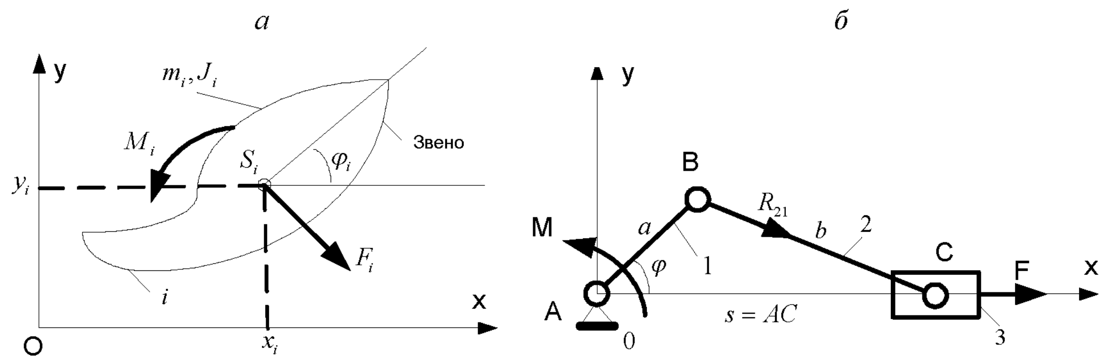
$$\sum_{i=1}^{N} [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i)\delta \ddot{x}_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i)\delta \ddot{y}_i + + (M_i - J_i \ddot{\varphi}_i)\delta \ddot{\varphi}_i] = 0 . \tag{7}$$

Здесь F_{ix}, F_{iy} – проекции внешних сил, приведенных к центру масс, M_i – момент внешних сил, m_i, J_i – масса и момент инерции относительно центра масс i-го звена, $\delta \ddot{x}_i, \delta \ddot{y}_i, \delta \ddot{\varphi}_i$ – вариации проекций вектора ускорения и углового ускорения.

Условие стационарности в вариационном и обычном виде может быть записано

$$\delta Z = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \ddot{q}} = 0 , \tag{8}$$

где в качестве величины Z принята мера принуждения в виде следующего функционала:



Звено i механизма и кривошипно-ползунный механизм

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\left(\ddot{x}_i - \frac{F_{ix}}{m_i}\right)^2 + m_i\left(\ddot{y}_i - \frac{F_{iy}}{m_i}\right)^2 + J_i\left(\ddot{\varphi}_i - \frac{M_i}{J_i}\right)^2 \right]. \qquad (9)$$

Найдем первые и вторые производные по времени t от функций положений i-го звена, записанных в виде зависимостей (6). Учитывая, что все они являются переменными от обобщенной координаты q, а эта координата есть функция времени, т.е. $q = q(t)$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q}\dot{q}, \quad \dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial q}\dot{q}, \quad \dot{\varphi}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q}\dot{q},$$

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial x_i}{\partial q}\ddot{q}, \quad \ddot{y}_i = \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial y_i}{\partial q}\ddot{q},$$

$$\ddot{\varphi}_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial x_i}{\partial q}\ddot{q}. \qquad (10)$$

Подставим зависимости (10) в выражение для функционала (9):

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial x_i}{\partial q}\ddot{q} - \frac{F_{ix}}{m_i}\right)^2 + m_i\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial y_i}{\partial q}\ddot{q} - \frac{F_{iy}}{m_i}\right)^2 + J_i\left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q}\ddot{q} - \frac{M_i}{J_i}\right)^2 \right].$$

Продифференцируем последнее выражение $Z = Z(q, \dot{q}, \ddot{q})$ по обобщенной координате $\ddot{q}$ согласно принципу экстремальности, после несложных преобразований получим

$$\frac{dZ}{d\ddot{q}} = A(q)\ddot{q} + B(q)\dot{q}^2 - Q(t, q, \dot{q}) = 0. \qquad (11)$$

Здесь для простоты введены следующие обозначения:

$$A(q) = \sum_{i=1}^{N}\left[m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q}\right)^2 + m_i\left(\frac{\partial y_i}{\partial q}\right)^2 + J_i\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q}\right)^2 \right],$$

$$B(q) = \sum_{i=1}^{N}\left[m_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial q^2}\frac{\partial x_i}{\partial q} + m_i\frac{\partial^2 y_i}{\partial q^2}\frac{\partial y_i}{\partial q} + J_i\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q^2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q} \right],$$

$$Q(t, q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{N}\left[F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q} + M_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial q} \right],$$

$$B(q) = \frac{1}{2}\frac{dA(q)}{dq}. \qquad (12)$$

Коэффициент $A(q)$, назовем его обобщенной массой, представляет собой не что иное, как известный приведенный массовый параметр $J_П$ или $m_П$ в зависимости от вида обобщенной координаты q – углового или линейного перемещения. Выражение $Q(t, q, \dot{q})$ является, очевидно, обобщенной силой.

В отличие от подобного вывода уравнений движения механизма по принципу Даламбера–Лагранжа здесь нет необходимости находить вариации от координат системы.

Рассмотрим случай плоского механизма со многими степенями свободы. Такие системы используются довольно часто в плоских рычажных механизмах, в механизмах роботов и манипуляторов, а также в различного рода зубчатых дифференциалах. Примем за обобщенные координаты q_s, $s = 1,2,\ldots,n$, а движение i-го звена определяется координатами

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$
$$\varphi_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n). \qquad (13)$$

Найдем первые и вторые производные по времени t:

$$\dot x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot q_j, \quad \ddot x_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot q_j \dot q_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\ddot q_j,$$

$$\dot y_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\dot q_j, \quad \ddot y_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot q_j \dot q_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\ddot q_j,$$

$$\dot \varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}\dot q_j, \quad \ddot \varphi_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot q_j \dot q_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}\ddot q_j. \qquad (14)$$

Подставим вторые производные в функционал (9), возьмем частные производные $\partial Z / \partial q_s = 0$, $s = 1,2,\ldots,n$, поменяем порядок суммирования (суммирование по i должно быть самым внутренним), после этого получим аналогичное дифференциальное уравнение движения N-звенного механизма как в работе [3]

$$\sum_{j=1}^{n} A_{js}\ddot q_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{jks}\dot q_j \dot q_k = Q_s, \quad s = 1,2,\ldots,n. \qquad (15)$$

Здесь для простоты введены следующие обозначения:

$$A_{js} = \sum_{i=1}^{N}\left[m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} \right) + J_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_s} \right],$$

$$B_{jks} = \sum_{i=1}^{N}\left[m_i \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_j \partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} \right) + J_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_j \partial q_k}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_s} \right],$$

$$Q_s = \sum_{i=1}^{N}\left[F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + M_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_s} \right]. \qquad (16)$$

Рассмотрим принцип Гаусса на примере кривошипно-ползунного механизма [4], для которого $s = s(j)$ (рис., б). Пусть для этого механизма J – момент инерции кривошипа относительно оси вращения (кривошип уравновешен), m – масса ползуна, массой шатуна пренебрегаем, M – движущий момент на ведущем звене, F – сила сопротивления, приложенная к ползуну. Запишем для этого механизма функционал Z

$$Z = \frac{1}{2}J\left(\ddot\varphi - \frac{M}{J}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\ddot s - \frac{F}{m}\right)^2. \qquad (17)$$

Производные от s можно записать в виде

$$\dot s = \frac{\partial s}{\partial \varphi}\dot\varphi, \quad \ddot s = \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}\dot\varphi^2 + \frac{\partial s}{\partial \varphi}\ddot\varphi. \qquad (18)$$

Подставим их в выражение (13), а затем возьмем частную производную

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot\varphi} = J\ddot\varphi - M + m\frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}\frac{\partial s}{\partial \varphi}\dot\varphi^2 + m\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2\ddot\varphi - F\frac{\partial s}{\partial \varphi} = 0. \qquad (19)$$

Окончательно получим дифференциальное уравнение движения механизма

$$\left[J + m\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2\right]\ddot\varphi + m\frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}\frac{\partial s}{\partial \varphi}\dot\varphi^2 = M + F\frac{\partial s}{\partial \varphi}. \qquad (20)$$

Запишем для механизма функцию положения $s = s(j)$

$$s(\varphi) = a\cos\varphi + p(\varphi),$$

$$\text{где } p(\varphi) = \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi}. \qquad (21)$$

Частные производные можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} = -a\sin\varphi - \frac{a^2\sin 2\varphi}{2p(\varphi)},$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} = -a\cos\varphi - \frac{a^2\cos 2\varphi}{p(\varphi)} - \frac{a^4\sin^2 2\varphi}{4p^3(\varphi)}.$$

(22)

Величина функционала Z косвенным образом связана с реакциями в кинематических парах согласно равенству, полученному из принципа Гаусса для несвободной системы, когда

$m_i\overline{w}_i = \overline{F}_i + \overline{R}_i$

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{R_i^2}{m_i}. \qquad (23)$$

Условие того, что величина Z минимальна для действительного движения, приводит к экстремальному свойству реакций связей: для действительного движения реакции связей минимальны. Найдем для нашего механизма, например, реакцию R_{21}, которая направлена вдоль шатуна. В случае движения только одного кривошипа с приложенной реакцией R_{21} и момента M можно записать дифференциальное уравнение

$$J\ddot{\varphi} = M - aR_{21}\frac{s}{b}\sin\varphi. \qquad (24)$$

Сравнивая (24) с (20), получаем выражение для искомой реакции в кинематической паре

$$R_{21} = \frac{bm\dfrac{\partial s}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial s}{\partial\varphi}\ddot{\varphi} + \dfrac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}\dot{\varphi}^2 - \dfrac{F}{m}\right)}{as\cdot\sin\varphi} =$$

$$= \frac{b\dot{s}\left(m\ddot{s} - F\right)}{as\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}}. \qquad (25)$$

Подобным образом можно определить все остальные составляющие реакций связей и давление на стойку механизма.

Данный способ вывода дифференциальных уравнений движения может быть распространен на любые другие механические системы, отличные от механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: Учеб. пособие для университетов. М.: Наука, 1990. 496 с.

2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М., 1961. 824 с.

3. *Молдабеков М.М., Тулешов А.К., Уалиев Г.У.* Математическое моделирование дирамики механизмов и машин. Алматы, 1998. 204 с.

4. *Дракунов Ю.М., Тулешов А.К.* Диалоговая система синтеза кривошипно-ползунного механизма по коэффи-циенту изменения средней скорости выходного звена // Материалы III международной конференции «Проблемы механики современных машин». Улан-Удэ, 2006. С. 67-70.

Резюме

Гаусстің қағидасына негізделген бір және бірнеше дәрежелі еркіндігі бар жазық механизмдердің қозғалыс теңдеулерін құрудың жаңа әдісі қарастырылған. Динамикалық жүйе үшін Гаусс функционалы құрылады. Вариациялық қағида негізінде, жүйеге түскен байланыстарды ескеріп, функционалдың минимумін іздейміз.

Summary

The new approach to a conclusion of the differential equations of movement of flat mechanisms with one and several degrees of freedom is considered on the basis of a Gauss' principle of the least compulsion. The variational principle results in a finding of a minimum function, as describing behaviour of dynamic system with the imposed connections.

КаНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы
Поступила 01.11.06г.