

К. К. ЕЛЕМЕСОВ

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА ИЗ РЕЗИНОКОРДНОГО МАТЕРИАЛА

Рассматривается линеаризация нелинейной модели крутильных колебаний вала из резинокордного материала. При этом полагается малость коэффициента e , характеризуемого отношением радиуса сечения вала к его длине. Проведен сравнительный анализ линейных и нелинейных колебаний.

В работе [1] рассматривается динамика вращающихся стержневых элементов механизмов и машин из физически нелинейного материала. Крутильные колебания муфты из резинокордного материала описываются уравнением [2]

$$G_0 J_p \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4R G_0 J_p \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \rho J_p \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \xi_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial t} - \xi_2 \frac{\partial U}{\partial t} = F(x, t), \quad (1)$$

где GJ_p – жесткость вала на кручение; rJ_p – момент инерции единицы вала; ξ_1, ξ_2 – коэффициенты, характеризующие внутреннее и внешнее трение соответственно; $U(x,t)$ – угол скручивания в некотором сечении вала; $F(x,t)$ – интенсивность внешнего скручивающего момента; R – радиус сечения вала.

Задаются следующие краевые и начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} u(x=0, t) = 0 \\ G_0 J_p \frac{\partial u}{\partial x} / x=1 = 0 \end{aligned} \right\} \text{– граничные условия; (2a)}$$

$$\left. \begin{aligned} u(x=l, t=0) = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x=l, t=0) = 0 \end{aligned} \right\} \text{– начальные условия. (2б)}$$

Динамическая модель (1) преобразована методом Бубнова–Галеркина к виду

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + B_1 \frac{df}{dt} + B_2 f^2(t) + \omega_0^2 f(t) = 0, \quad (3)$$

где

$$A_1 = G_0 J_p \frac{\pi^2}{4l^2}; \quad A_2 = 4R G_0 J_p \frac{\pi^3}{8l^3};$$

$$A_3 = \rho J_p; \quad A_4 = \xi_1 \frac{\pi^2}{4l^2}; \quad A_5 = \xi_2;$$

$$B_1 = \frac{A_4 + A_5}{A_3}; \quad B_2 = \frac{4}{3\pi} \frac{A_2}{A_3}; \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^2 G_0}{4\rho l^2}. \quad (4)$$

Для случая слабо нелинейных систем получено решение (3) во втором приближении асимптотическим методом разложения по малому параметру Боголюбова–Крылова [3, 4]:

$$f = a \cos \varphi + B_2 \frac{a^2}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{6} \cos 2\varphi - 1 \right), \quad (5)$$

$$a = \exp\left(-\frac{B_1 B_2 t}{2}\right),$$

$$\varphi = \left(\omega_0 - \frac{B_1^2 B_2^2}{8\omega_0} \right) t + \frac{11}{12} \frac{B_2}{\omega_0^3 B_1} \exp(-B_1 B_2 t). \quad (6)$$

Для общего случая нелинейной системы (3), когда коэффициент нелинейности не ограничива-

ется малостью величины, проводится численный анализ (3) методом разностных схем. Для удобства вводится безразмерное время $\tau = t \omega_0$, где ω_0 – частота собственных колебаний линейной системы. Тогда колебания автономной системы в безразмерных параметрах задаются уравнением вида

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + k \frac{df}{d\tau} + \varepsilon f(\tau)^2 + f(\tau) = 0, \quad (7)$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{8R}{3l}, \quad k = \frac{\pi^2 \xi_1 + 4l^2 \xi_2}{2\pi l J_p \sqrt{\rho G_0}}.$$

Коэффициент нелинейности ε характеризуется величиной отношения радиуса сечения вала к его длине. Для случая слабо нелинейных систем получено решение модели (7) асимптотическим методом Боголюбова–Крылова и методом разностных схем (рис.1[1]). Расчеты проводились при следующих геометрических и физических параметрах системы:

$$R = 0,05 \text{ м}; \quad L = 0,75 \text{ м}; \quad G = 4\text{Ч}10^5 \text{ Н/м}^2;$$

$$r = 1,1\text{Ч}10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$x_1 = 0,01 \text{ кгЧм}^3/\text{с}; \quad x_2 = 0,2 \text{ кгЧм/с}.$$

Как следует из графиков (рис. 1), при решении уравнения движения обоими методами результаты исследований хорошо согласуются. Для случая увеличения коэффициента нелинейности ε в три раза наблюдается существенное расхождение результатов исследования (рис. 2 [1]), т.е. применение асимптотического метода Боголюбова–Крылова к нелинейным системам дает погрешность в решении.

Целью данной работы являются линеаризация динамической модели (1), а также количественная и качественная оценка влияния нелинейных факторов на динамику рассматриваемых объектов.

Исследован случай слабо нелинейных систем, для которых применение асимптотического метода Боголюбова–Крылова дает удовлетворительные результаты. На рис. 3 представлены результаты аналитического решения для нелинейной модели (7) и ее линеаризованного слу-

Рис. 1. Сравнительный анализ решения системы асимптотическим методом и методом разностных схем

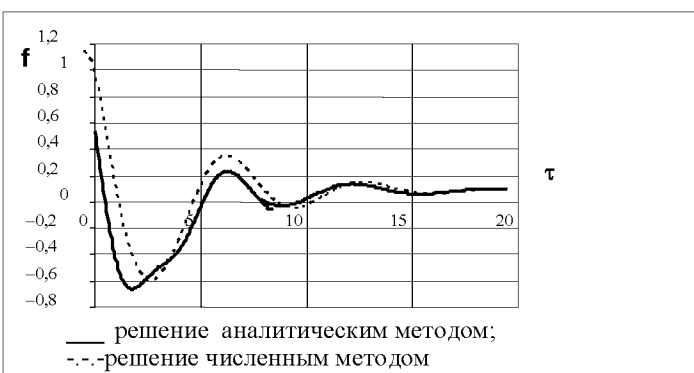
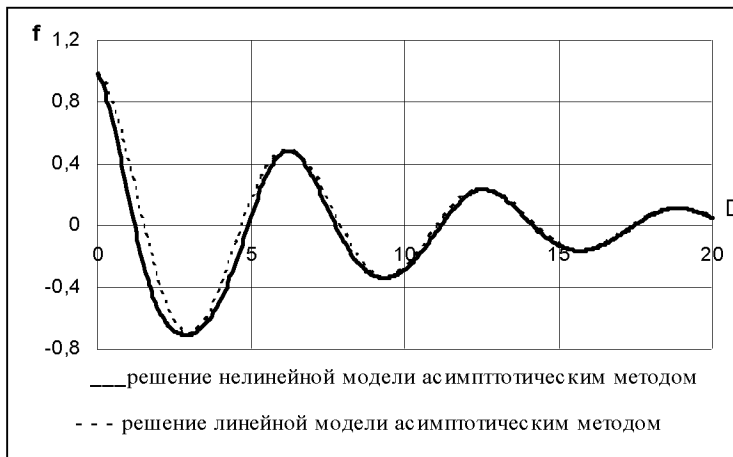


Рис. 2. Влияние коэффициента нелинейности на решение нелинейной системы (коэффициент нелинейности больше в 3 раза, чем на рис. 1)

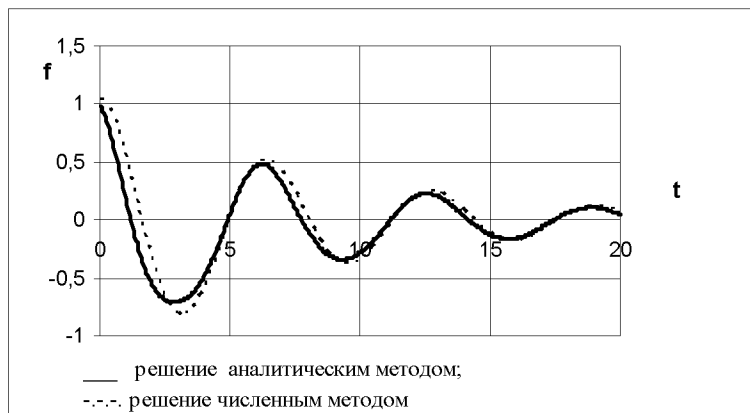


Рис. 3. Сравнительный анализ решения нелинейной и линеаризованной модели резинокордной муфты для основного случая ($R/L=8/45$)

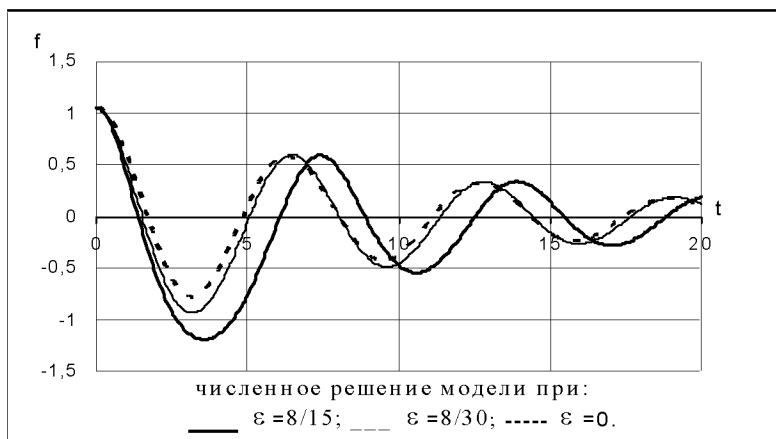


Рис. 4. Влияние степени нелинейности модели и ее линеаризация на ее численное решение

чая при $\varepsilon = \frac{8}{45}$. Из графиков видно хорошее совпадение результатов, т.е. слабая нелинейность системы практически не влияет на результат исследования. Для случая сильно нелинейных систем и их линеаризации рассмотрено численное решение (7) методом разностных схем (рис. 4).

Исследования показали, что с увеличением нелинейного параметра системы ε наблюдается увеличение амплитуды колебаний упругого элемента. Это объясняется зависимостью коэффициентом нелинейности ε от отношения радиуса вала R к его длине L , система претерпевает большие деформации. Из графиков на рис. 4 видно расхождение результатов исследования нелинейной модели с ее линеаризованным случаем. Самое большое отклонение амплитуды наблю-

дается при значении, когда $\varepsilon = \frac{8}{15}$, т.е. нелинейность модели ведет к увеличению амплитуды колебаний. Таким образом, зная влияние параметров системы на колебательный процесс, можно

управлять последним, добиваясь при этом повышения надежности элементов машин и улучшения их рабочих характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елемесов К.К., Хаджиева Л.А. Анализ колебаний физически нелинейного стержневого элемента // Вестник КазНТУ. 2006. № 6. С. 141-145.
2. Хаджиева Л.А. О моделировании динамики элементов машин из физически нелинейного материала // Перспектива развития транспортной техники. Алматы, 2003. С. 170-174.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
4. Масанов Ж.К., Хаджиева Л.А., Елемесов К.К. О колебаниях нелинейных систем с мягкими и жесткими характеристиками // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2005. № 1. С. 62-70.

Резюме

Резинкекордты материалдан жасалған стерженді элементтің сызықты және сызықты емес тербелістері қарастырылды. Бейсызықты модельде e өзгерісі арқылы жеңілдету. Асимптоталық әдістер арқылы сызықты және сызықты емес шешіндершің графиктер қарастырылған.

Summary

Linear and non-linear fluctuation of string element from rezinocord material is considered. Simplification of non-linear model due to the change of e . The diagram of salvation for linear and non-linear case is considered by the asymptotic method.