УДК 517.946

М. О. ОРЫНБАСАРОВ

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ (Ф.Р.) ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ Ф.Р.

Построено методом параметрикс фундаментальное решение вырождающегося параболического уравнения с переменными коэффициентами и исследована дифференцируемость ф.р.

Рассмотрим параболическое уравнение вида

$$\rho_0(t)U_t = L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x,t), \tag{0.1}$$

где $L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – линейный эллиптический оператор 2-го порядка

$$LU \equiv \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x,t)U_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)U_{x_i} + c(x,t)U . \tag{0.2}$$

Коэффициент $\rho_0(t) \geq 0$ при $0 < t < T$ и $\rho_0(0) = 0$ или Θ порядком вырождения $p < 1$. Тогда очевидно, что интеграл $\rho(t) = \int_0^t \rho_0^{-1}(z)dz$ существует. Функция $\rho(t) \geq 0$ и $\rho(0) = 0$ с порядком вырождения $q = 1 - p > 0.$

Если же старшие коэффициенты оператора L, также вырождающегося при $t = 0$ с некоторым порядком p_1, то, умножая на t^{-p_1}, обе части уравнения (0.1) можно привести к рассматриваемому случаю.

Предполагаем, что коэффициенты оператора L определены в $\Omega_T = \Omega \times [0,T], \Omega \in R^n$ и выполнены условия (равномерно параболичисности)

$$\text{А. } \lambda_1|\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \lambda_2|\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^n \text{ и } |\xi| \neq 0, \tag{0.3}$$

где λ_1, λ_2 – положительные постоянные.

$$\text{Б. } a_{ij}(x,t) \in C_{x,t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T);\, b_i(x,t), c(x,t) \in C_{x,t}^{\alpha,0}(\Omega_T) \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{0.4}$$

где $C_{x\ \ ,t}^{k+\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$-класс Гельдера [*1*].

В. Матрица $A(x,t) = (a_{ij}(x,t))$-симметрическая.

I. Построение фундаментального решения (ф.р.) уравнения (0.1).

1^0. Построение параметрикса G_0. Ф.р. уравнения (0.1) построим обычным методом параметрикса [1–3]. С этой целью сначала рассмотрим задачу Коши для следующего уравнения:

$$L_0(U) \equiv \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(\xi,\tau)U_{x_i x_j} - \rho_0(t)u_t = 0 \tag{1.1}$$

с замороженным коэффициентами $a_{ij}(\xi,\tau)$ в точке $(\xi,\tau)\in\Omega_T$ и начальным условием

$$U(x,t)\big|_{t=\tau}=f(x). \tag{1.2}$$

Решая задачи Коши (1.1)–(1.2) методом интегрального преобразование Фурье, после несложного вычисления решение можно представить в виде

$$U(x,t)=\int_{R^n} f(\xi)G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))d\xi, \tag{1.3}$$

где

$$G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))=\frac{[\det A(\xi,\tau)]^{-1/2}}{\left(2\sqrt{\pi[\rho(t)-\rho(\tau)]}\right)^n}\exp\left\{-\frac{R^{(\xi,\tau)}(x-\xi)}{4[\rho(t)-\rho(\tau)]}\right\}, \tag{1.4}$$

$$R^{(\xi,\tau)}(x-\xi)=\sum_{ij=1}^{n}\bar{a}_{ij}(\xi,\tau)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j),\qquad \bar{a}_{ij}(\xi,\tau)\text{ – элемент матрицы }A^{-1}, \tag{1.5}$$

обратной к матрице $A(\xi,\tau)$.

Легко проверить, что построенная функция $G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))$ действительно является ф.р. задачи Коши для уравнения (1.1).

В силу условия (0.4) и (0.5), налагаемые на коэффициенты уравнения, нетрудно доказать как в [1–3], что ф.р. $G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))$ обладают следующими свойствами:

1. При $t>\tau$ функция $G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))\in C^{\infty}_{x,\rho(t)}$ и

$$\left|D_x^r D_{\rho(t)}^s G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))\right|\le\frac{M}{[\rho(t)-\rho(\tau)]^{\frac{n}{2}+s+\frac{r}{2}}}\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}. \tag{1.6}$$

2. Функция $G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))$ и ее производные по x и $\rho(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\begin{gathered}\left|D_x^r D_{\rho(t)}^s G_0^{(\xi',\tau_1)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))-D_x^r D_{\rho(t)}^s G_0^{(\xi'',\tau_2)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))\right|\le\\ \le\frac{M\left[|\xi'-\xi''|^{\alpha}+|\tau_1-\tau_2|^{\alpha/2}\right]}{[\rho(t)-\rho(\tau)]^{\frac{n}{2}+s+\frac{r}{2}}}\exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}.\end{gathered} \tag{1.7}$$

3. При любом фиксированном ξ и при $t>\tau$ имеют место неравенства

$$\int_{R^n} G_0^{(\xi,\tau)}(z,\rho(t)-\rho(\tau))dz=1, \tag{1.8}$$

$$\int_{R^n} D_{\rho(t)}^s D_z^r G_0^{(\xi,\tau)}(z,\rho(t)-\rho(\tau))d\xi=0. \tag{1.9}$$

4. Справедливо неравенство

$$I_0=\left|\int_{R^n} D_{\rho(t)}^s D_x^r G_0^{(\xi,\tau)}(z,\rho(t)-\rho(\tau))d\xi\right|\le\frac{M}{[\rho(t)-\rho(\tau)]^{\frac{s+2r-\alpha}{2}}}e\,. \tag{1.10}$$

Кроме того, если коэффициенты $a_{ij}(x,t) \in C_{x\ \ ,t}^{k+\alpha \frac{1+\alpha}{2}}(\Omega_T)$ и ограничены, то оценки (1.6) и (1.7) обобщаются:

5. $$\left|D_x^r D_{\rho(t)}^s D_\xi^m G_0^{(\xi,\tau)}(x-z,\rho(t)-\rho(\tau))\right| \le \frac{M}{[\rho(t)-\rho(\tau)]^{\frac{n}{2}+s+\frac{r}{2}}} exp\left\{-\delta \frac{|x-z|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\} \qquad (1.11)$$

$$\left|D_x^r D_{\rho(t)}^s D_\xi^m G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))\right| \le \frac{M}{[\rho(t)-\rho(\tau)]^{\frac{n}{2}+s+\frac{r+m}{2}}} exp\left\{-\delta \frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}.$$

6. $$\left|D_x^r D_{\rho(t)}^s D_\xi^m G_0^{(\xi',\tau_1)}(x-z,\rho(t)-\rho(\tau)) - D_x^r D_{\rho(t)}^s G_0^{(\xi'',\tau_2)}(x-z,\rho(t)-\rho(\tau))\right| \le$$

$$\le \frac{M\left[|\xi'-\xi''|^\alpha + |\tau_1-\tau_2|^{\alpha/2}\right]}{[\rho(t)-\rho(\tau)]^{\frac{n}{2}+s+\frac{r}{2}}} exp\left\{-\delta \frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}. \qquad (1.12)$$

Через M, d везде обозначим без уточнения конкретного вида положительные постоянные.

2^0. Объемные потенциалы с ядром $G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))$. Рассмотрим следующие интегралы:

$$V_0(x,t,\tau) = \int_{R^n} f(\xi,\tau) G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))d\xi,$$

$$V_1(x,t,\tau) = \int_\tau^t \frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)} \int_\Omega F(\xi,\tau) G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))d\xi .$$

Относительно $V_0(x,t,\tau)$, $V_1(x,t,\tau)$ имеют место следующее утверждения:

Теорема 1. Пусть $f(x,t) \in C(\Omega_T)$ и ограничена. Тогда $V_0(x,t,\tau) \in C_{x,\rho(t)}^\infty$ при $x \in \Omega, t > \tau$ и

$$\lim_{\tau \to t} V_0(x,t,\tau) = \begin{cases} f(x), если & x \in \Omega, \\ 0 \quad , если & x \notin \Omega. \end{cases} \qquad (1.13)$$

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость $V_0(x,t,\tau)$ по $x, \rho(t)$ следует из оценки (1.6) и из равномерной сходимости интегралов при $t-\tau \ge \varepsilon > 0$. Равенство (1.13) доказывается аналогично теореме 1 [2, с. 15].

Теорема 2. Если функция $F(x,t) \in C_{x,t}^{\alpha,0}(\Omega_T)$ и ограничена, то функция $V_1(x,t,\tau) \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega_T)$, и при $\Omega = R^n$ производные выражаются по формулам

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j} = \int_\tau^t \frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)} \int_{R^n} \left[F(\xi,\lambda) - F(x,\lambda)\right] \frac{\partial^2 G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))}{\partial x_i \partial x_j} d\xi,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \int_\tau^t \frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)} \int_{R^n} \left[F(\xi,\lambda) - F(x,\lambda)\right] \frac{\partial G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau))}{\partial t} d\xi + \frac{F(x,t)}{\rho_0(t)}.$$

(1.14)

Доказательство. Существование производных $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial V_1}{\partial t}$ доказывается аналогичным методом как в [2, с. 17]. Равенства (1.14) следует из равенства (1.9) и (1.13).

3^0. Построение фундаментального решения. Будем искать ф.р. $G(x,t;\xi,\tau)$ уравнения (1.1) в виде

$$G(x,t;\xi,\tau)=G_0^{(\xi,\tau)}\left(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau)\right)+\int_\tau^t \frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_\Omega G_0^{(\eta,\tau)}\left(x-\eta,\rho(t)-\rho(\tau)\right)\Phi(\eta,\lambda;\xi,\tau)d\eta=$$

$$=G_0^{(\xi,\tau)}\left(x-\xi,\rho(t)-\rho(\tau)\right)+G_1(x,t;\xi,\tau), \tag{1.15}$$

где $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ – неизвестная функция, о которой априори предполагается:

а) при $t>\tau$ функция $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ непрерывна и

$$\Phi(x,t;\xi,\tau)=\frac{M}{[\rho(t)-\rho(\tau)]^{\frac{n+2-\alpha}{2}}}\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\};$$

б) справедливо неравенство

$$\left|\Phi(x,t;\xi,\tau)-\Phi(y,t;\xi,\tau)\right|\le\frac{M|x-y|^\beta}{\left[\rho(t)-\rho(\tau)\right]^{\frac{n+2-\gamma}{2}}}\left[\exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}+\left\{-\delta\frac{|y-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}\right],$$

$$0<\beta<\alpha,=\quad\gamma\quad\alpha-\beta. \tag{1.16}$$

Неизвестная функция $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ находится из условия, чтобы функция $G(x,t;\xi,\tau)$ удовлетворяла по (x,t) уравнению (0.1). В силу приведенных свойств объемных потенциалов относительно $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ получим следующее уравнение:

$$\Phi(x,t;\xi,\tau)=K(x,t;\xi,\tau)+\int_\tau^t\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_\Omega K(x,t;\eta,\tau)\Phi(\eta,\lambda;\xi,\tau)d\eta, \tag{1.17}$$

где

$$K(x,t;\xi,\tau)=\sum_{ij=1}^n\left[a_{ij}(x,t)-a_{ij}(\xi,\tau)\right]\frac{\partial^2 G_0}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\frac{\partial G_0}{\partial x_i}+c(x,t)G_0.$$

Используя условия (0.4) и неравенства (1.6), можно показать, что

$$K(x,t;\xi,\tau)=\frac{M}{[\rho(t)-\rho(\tau)]^{\frac{n+2-\alpha}{2}}}exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}, \tag{1.18}$$

следовательно, особенность ядра интегрируема.

Существование решения интегрального уравнения (1.17) и выполнения условий *а* и *б*, налагаемых на $\Phi(x,t;\xi,\tau)$, доказывается стандартным приемом, изложенным в [1–3] для невырожденных параболических уравнений.

Интегральное уравнение (1.17) решается по методу последовательных приближений, и его решение $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ выражается в виде ряда

$$\Phi(x,t;\xi,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(x,t;\xi,\tau), \tag{1.19}$$

где K_m – повторное ядро

$$K_m(x,t;\xi,\tau)=\int_{\tau}^{t}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_{\Omega}K(x,t;\eta,\lambda)K_{m-1}(\eta,\lambda;\xi,\tau)d\eta,$$

с помощью индукции можно доказать оценку

$$\left|K_m(x,t;\xi,\tau)\right|\le M^m\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^{\frac{n}{2}(m-1)}\frac{\Gamma^m\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(m\frac{\alpha}{2}\right)}\left[\rho(t)-\rho(\tau)\right]^{\frac{m\alpha-n-2}{2}}exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}. \tag{1.20}$$

Из оценки (1.20) следует выполнение условия *а*. Выполнение условия *б* доказывается совершенно аналогично теореме 7 [2, с. 29].

Непосредственно оценивая $G_1(x,t;\xi,\tau)$, имеем

$$\left|G_1(x,t;\xi,\tau)\right|\le\frac{M}{\left[\rho(t)-\rho(\tau)\right]^{\frac{n-\alpha}{2}}}exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}. \tag{1.21}$$

II. Дифференцируемость фундаментального решения.

Если дополнительно требовать некоторые гладкости от коэффициентов уравнения (0.1), то можно доказать дифференцируемость неизвестной функции $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ и ф.р. $G(x,t;\xi,\tau)$ по x и ο.

Лемма 1. Если коэффициенты $a_{ij}(x,t)\in C_{x}^{k+\alpha},t^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $b_i(x,t),c(x,t)\in C_{x,t}^{k,0}$ и все производные ограничены, то для повторных ядер $K_m(x,t;\xi,\tau)$ справедливы неравенства

$$\left|D_x^rD_\xi^sK_m(x,t;\xi,\tau)\right|\le\frac{M}{\left[\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right]^{n+2-m+r+s}}exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}\quad 0\le s+r\le k, \tag{1.22}$$

$$\left|D_\xi^sK_m(\xi+z,t;\xi,\tau)\right|\le\frac{M}{\left[\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right]^{n+2-m}}exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}\quad 0\le s\le k. \tag{1.23}$$

Доказательство. После непосредственного дифференцирования $K_1(x,t;\xi,\tau)$ по x и ο и оценивания полученных производных в силу неравенства (1.6) имеем

$$\left|D_x^rD_\xi^sK_1(x,t;\xi,\tau)\right|\le\frac{M}{\left[\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right]^{n+1+s+r}}exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}. \tag{1.24}$$

Далее, положим $x-\xi=z$, тогда

$$K_1\left(z+\xi,t;\xi,\tau\right) \quad \sum_{ij=1}^{n}\left[a_{ij}\left(z+\xi,t\right)-a_{ij}\left(\xi,\tau\right)\right]\frac{\partial^{(\xi,\tau)}G\left(z,\left(\rho(t)-\rho(\tau)\right)\right)}{\partial x_i\partial x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_i\left(z+\xi,t\right)\frac{\partial G_0^{(\xi,\tau)}\left(z,\left(\rho(t)-\rho(\tau)\right)\right)}{\partial x_i}+C\left(x+\xi,t\right)G_0^{(\xi,\tau)}\left(z,\left(\rho(t)-\rho(\tau)\right)\right).$$

Теперь, дифференцируя $K_1(z+\xi,t;\xi,\tau)$, в силу неравенства (1.11) получаем

$$\left|D_{\xi}^{s}K_1(z+\xi,t;\xi,\tau)\right|\le\frac{M}{\left[\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right]^{n+1}}exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}. \tag{1.25}$$

Рассмотрим повторное ядро

$$K_2\left(x,t;\xi,\tau\right)=\int_{\tau}^{t}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_{\Omega}K\left(x,t;\eta,\lambda\right)K_1\left(\eta,\lambda;\xi,\tau\right)d\eta=\int_{\tau}^{t_1}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_{\Omega}K\left(x,t;\eta,\lambda\right)K_1\left(\eta,\lambda;\xi,\tau\right)d\eta+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_{\Omega}K\left(x,t;\eta,\lambda\right)K_1\left(\eta,\lambda;\xi,\tau\right)d\eta \quad K_{21}\left(x,t;\xi,\tau\right)+K_{22}\left(x,t;\xi,\tau\right),$$

где $\tau<t_1<t$.

Для первого слагаемого $K_{21}(x,t;\xi,\tau)$ имеем $t-\lambda\ge t-t_1 \succ 0$ и, следовательно, $\rho(t)-\rho(\lambda)\succ 0$, поэтому, дифференцируя по x, найдем

$$D_x^r K_{21}(x,t;\xi,\tau)=\int_{\tau}^{t}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_{\Omega}D_x^r\left[K(x,t;\eta,\lambda)\right]\cdot K_1(\eta,\lambda;\xi,\tau)d\eta.$$

Сделаем замену $\eta=\xi+z$. Тогда

$$D_x^r K_{21}=\int_{\tau}^{t}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_{\Omega}D_x^r\left[K(x,t;\xi+\zeta,\lambda)\right]\cdot K_1(\xi+z,\lambda;\xi,\tau)d\eta.$$

Теперь, применяя D_{ξ}^{s} к полученному равенству и оценивая при помощи неравенств (1.24) и (1.25), имеем

$$\left|D_x^r D_{\xi}^{s}K_{21}\right|\le M^2\int_{\tau}^{t_1}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_{R^n}\frac{exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi-z|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right)^{n+1+r+s}}\cdot\frac{exp\left\{-\delta\frac{|\zeta|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right)^{n+1}}.$$

Отсюда, используя равенства

$$\int_{R^n} \left\{ \exp - \delta \frac{|x-\xi-\zeta|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)} - \delta \frac{|\zeta|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)} \right\} d\zeta =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\pi}{\delta}} \right)^n \frac{\left(\sqrt{[\rho(t)-\rho(\lambda)][\rho(\lambda)-\rho(\tau)]} \right)^n}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)} \right)^n} \exp\left\{ -\delta \frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)} \right\}, \quad (1.26)$$

получим

$$\left| D_x^r D_\xi^s K_{21} \right| \le \frac{M_1}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)} \right)^n} \int_\tau^{t_1} \frac{\rho_0^{-1}(\lambda) d\lambda}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\lambda)}^{\,r+s+1} \sqrt{\rho(t)-\rho(\lambda)} \right)} exp\left\{ -\delta \frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)} \right\}.$$

Если t_1 выберем так, что $\rho(t_1) = \frac{\rho(t)+\rho(\tau)}{2}$, то $\rho(t)-\rho(\lambda) \ge \frac{1}{2}(\rho(t)-\rho(\tau))$. Поэтому легко убедиться, что

$$\left| D_x^r D_\xi^s K_{21} \right| \le \frac{M_2}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)} \right)^{n+r+s}} exp\left\{ -\delta \frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)} \right\}.$$

Точно такую же оценку можно получить аналогичным способом для второго слагаемого $K_{22}(x,t;\xi,\tau)$. Поэтому для повторного ядра $K_2(x,t;\xi,\tau)$ имеем

$$\left| D_x^r D_\xi^s K_2(x,t;\xi,\tau) \right| \le \frac{M}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)} \right)^{n+r+s}} exp\left\{ -\delta \frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)} \right\}. \quad (1.27)$$

Далее, полагая $x = \xi + z$, а затем $\eta = \xi + z$ $K_2(x,t;\xi,\tau)$, можно представить в виде

$$K_2(\xi+z,t;\xi,\tau) = \int_\tau^t \frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)} \int_{\Omega^*} K(\xi+z,t;\xi+\zeta,\lambda) K_1(\xi+\zeta,\lambda;\xi,\tau) d\zeta.$$

Применяя оператор D_ξ^s к обеим частям этого равенства и используя неравенства (1.25), после несложного вычисления имеем

$$\left| D_\xi^s K_2(\xi+z,t;\xi,\tau) \right| \le \frac{M}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)} \right)^n} exp\left\{ -\delta \frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)} \right\}. \quad (1.28)$$

Полученные неравенства (1.27) и (1.28) для $K_2(x,t;\xi,\tau)$ аналогичны неравенствам (1.24) и (1.25) для $K_1(x,t;\xi,\tau)$.

Продолжая этот процесс по индукции, очевидным образом получим оценки (1.22) и (1.23). Так как функция $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ определяется как сумма повторных ядер (1.19), то справедливо

Следствие. Если коэффициенты $a_{ij}(x,t) \in C_{x,t}^{k+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$; $b_i(x,t), c(x,t) \in C_{x,t}^{k,0}(\overline{\Omega}_T)$ и все производные ограничены, то функция $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ дифференцируема по x и ξ и справедливы оценки

$$\left|D_x^r D_\xi^s \Phi(x,t;\xi,\tau)\right| \le \frac{M}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right)^{n+1+r+s}} exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}, \quad 0 \le r+s \le k, \tag{1.29}$$

$$\left|D_\xi^s \Phi(\xi+z,t;\xi,\tau)\right| \le \frac{M}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right)^{n+1}} exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}, \quad 0 \le s \le k.$$

(1.30)

Замечание. Можно доказать, как и в [1–3], гельдеровость ядра $K(x,t;\xi,\tau)$ и его производного по x, и следовательно, используя интегральное уравнение (1.17) гельдеровости неизвестной функции $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ и ее производных.

Используя оценки (1.24)–(1.25) для ядра $K(x,t;\xi,\tau)$ и оценки (1.28)–(1.29) $\Phi(x,t;\xi,\tau)$, можно доказать, что второе слагаемое в (1.15) дифференцируем по x,t и ξ. В частности, имеет место

Теорема 3. $G_1(x,t;\xi,\tau)$ имеет производные $D_x^r D_t^s D_\xi G_1$ $(2s+r \le 2)$ и справедлива оценка

$$\left|D_t D_\xi G_1\right|, \left|D_x^2 D_\xi G_1\right| \le \frac{M}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right)^{n+2}} \exp\left\{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}. \tag{1.31}$$

Доказательство. Существование производных $D_x^2 D_\xi G_1(x,t;\xi,\tau)$ производится аналогичным способом как оценка повторного ядра $K_2(x,t;\xi,\tau)$ в лемме 1. Представим $G_1(x,t;\xi,\tau)$ в виде

$$G_1(x,t;\xi,\tau) = \int_\tau^{t_1}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_\Omega G_0^{(\eta,\lambda)}(x-\eta,\rho(t)-\rho(\lambda))\Phi(\eta,\lambda;\xi,\tau)d\eta +$$
$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_\Omega G_0^{(\eta,\lambda)}(x-\eta,\rho(t)-\rho(\lambda))\Phi(\eta,\lambda;\xi,\tau)d\eta \quad G_{11}+G_{12},$$

где $\tau < t_1 < t$. Для G_{11} имеем $t-\lambda \ge t-t_1$ f 0, следовательно $\rho(t)-\rho(\lambda)$ f 0. Поэтому можно дифференцировать G_{11} по x под знаком интеграла

$$D_x^r G_{11} = \int_\tau^{t_1}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_\Omega D_x^r G_0^{(\eta,\lambda)}(x-\eta,\rho(t)-\rho(\lambda))\Phi(\eta,\lambda;\xi,\tau)d\eta, \quad (r \le 2).$$

Далее сделаем подстановки $\eta = \xi + z$. Тогда

$$D_x^r G_{11} = \int_\tau^{t_1}\frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)}\int_{\Omega^*} D_x^r G_0^{(\xi+z,\lambda)}(x-\xi-z,\rho(t)-\rho(\lambda))\Phi(\xi+z,\lambda;\xi,\tau)dz, \quad (r \le 2).$$

Теперь, дифференцируя по ξ и учитывая неравенства (1.6), (1.29), имеем

$$\left|D_x^r D_\xi G_{11}\right| \le M^2 \int_\tau^{t_1} \frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)} \int_{\Omega^*} \frac{exp\left\{-\delta \dfrac{|x-\xi-z|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\lambda)}\right)^{n+r+1}} \frac{exp\left\{-\delta \dfrac{|z|^2}{\rho(\lambda)-\rho(\tau)}\right\}}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right)^{n+1}} dz .$$

Отсюда в силу равенства (1.26) и $\rho(t)-\rho(\lambda) \ge \frac{1}{2}(\rho(t)-\rho(\tau))$ при $\rho(t_1)=\frac{1}{2}(\rho(t)+\rho(\tau))$ легко убедиться, что для G_{11} справедлива оценка (1.31).

Переходим к оценке производных G_{12}. Для этого, производя подстановки $h = x + z$, перепишем G_{12} в виде

$$G_{12}(x,t;\xi,\tau) = \int_{t_1}^{t} \frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)} \int_{\Omega^*} G_0^{(x+\zeta,\lambda)}(\zeta, \rho(t)-\rho(\lambda)) \Phi(x+\zeta,\lambda;\xi,\tau) d\zeta .$$

Для G_{12} ясно, что $\lambda - \tau \ge t_1 - \tau \succ 0$, следовательно, $\rho(t) - \rho(\lambda) \succ 0$, поэтому $D_x^r D_\xi G_{12}$ существует и

$$D_x D_\xi G_{12} = \int_{t_1}^{t} \frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)} \int_{\Omega^*} \Big[D_x G_0^{(x+\zeta,\lambda)}(\zeta, \rho(t)-\rho(\lambda)) D_\xi \Phi(x+\zeta,\lambda;\xi,\tau) +$$

$$+\left|G_0^{(x+\zeta,\lambda)}(\zeta, \rho(t)-\rho(\lambda))\right| D_x D_\xi \Phi(x+\zeta,\lambda;\xi,\tau) \Big] d\zeta.$$

Теперь сделаем обратную замену $\zeta = \eta - x$ и затем дифференцируем по x. Тогда

$$D_x^2 D_\xi G_{12} = \int_{t_1}^{t} \frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)} \int_{\Omega} \Big[D_x D_y G_0^{(y,\lambda)}(x-\eta, \rho(t)-\rho(\lambda))_{y=\eta} D_\xi \Phi(\eta,\lambda;\xi,\tau) +$$

$$+ D_x D_y G_0^{(y,\lambda)}(x-\eta, \rho(t)-\rho(\lambda))_{y=\eta} D_\eta D_\xi \Phi(\eta,\lambda;\xi,\tau) \Big] d\eta$$

и, оценивая в силу неравенств (1.11), (1.29), имеем

$$\left|D_x^2 D_\xi G_{12}\right| \le$$

$$\le M^2 \int_\tau^{t_1} \frac{d\lambda}{\rho_0(\lambda)} \int_{R^n} \frac{1+\sqrt{\rho(t)-\rho(\lambda)}}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\lambda)}\right)^{n+1} \left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right)^{n+3}} \exp\left\{-\delta \frac{|x-\eta|^2}{\rho(t)-\rho(\lambda)} - \delta \frac{|\eta|^2}{\rho(\lambda)-\rho(\tau)}\right\} d\eta.$$

Отсюда, используя равенства (1.26) и учитывая $\rho(t)-\rho(\lambda) \ge \frac{1}{2}(\rho(t)-\rho(\tau))$, при $\rho(t_1)=\frac{1}{2}(\rho(t)+\rho(\tau))$ получаем, что для $D_x^2 D_\xi G_1$ также имеет место неравенство (1.31). Существование $D_t D_\xi G_1$, его оценка доказываются аналогичным способом.

Так как ф.р. $G(x,t;\xi,\tau) = G_0^{(\xi,\tau)}(x-\xi, \rho(t)-\rho(\tau)) + G_1(x,t;\xi,\tau)$ то из теоремы 3 и оценки (1.12) следует следующая

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 3, то ф.р. $G(x,t;\xi,\tau)$ имеет производные $D_x^2 D_\xi G$ и $D_t D_\xi G$, являющиеся непрерывными функциями при $x \ne \xi$ и подчиняющиеся неравенствам

$$\left|D_x^r D_t^s D_\xi G(x,t;\xi,\tau)\right| \le \frac{M}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right)^{n+2s+r+1}} exp\left\{-\delta \frac{|x-\xi|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\} \qquad (1.32)$$

$(r + 2s \le 2)$