

## СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО ДВУХПОДВИЖНОГО МЕХАНИЗМА VI КЛАССА ПО ЗАДАНЫМ ПОЛОЖЕНИЯМ ВЫХОДНЫХ ТОЧЕК ШАТУННЫХ ЗВЕНЬЕВ

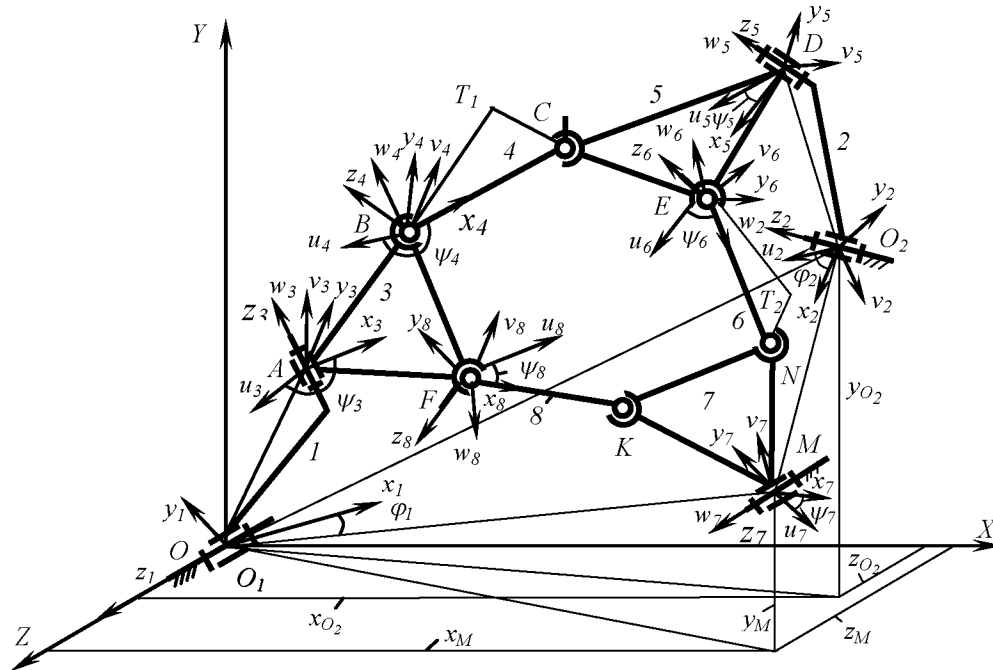
Рассмотрим задачу синтеза пространственного направляющего механизма VI класса общего вида в соответствии с рисунком по заданным положениям входных звеньев 1 и 2

$$\varphi_{1i} = \varphi_1(t_i), \quad \varphi_{2i} = \varphi_2(t_i) \quad \text{и} \quad (1)$$

выходных точек  $T_1, T_2$  соответственно шатунных звеньев 8, 6:

$$\begin{aligned} X_{T1i} &= X_{T1}(t_i), \quad Y_{T1i} = Y_{T1}(t_i), \quad Z_{T1i} = Z_{T1}(t_i), \\ & \quad i = \overline{1,5}. \\ X_{T2i} &= X_{T2}(t_i), \quad Y_{T2i} = Y_{T2}(t_i), \quad Z_{T2i} = Z_{T2}(t_i), \\ & \quad i = \overline{1,5}. \end{aligned} \quad (2)$$

Задача синтеза механизма решается с использованием метода интерполирования. Для решения задачи синтеза кинематической цепи  $DENM$  механизма по заданным положениям с выходной точкой  $T_2$  звена 6 ( $EN$ ) [1], в котором приближающая окружность точки  $N$  радиусом  $l_{NM} = l_{5\phi}$  с центром в точке  $M$  звена 5 ( $NM$ ) определяется как линия пересечения сферы с координатами  $X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1}$  и плоскости, удобно использовать выражения взвешенных разностей [2]:



$$\Delta q = l_{5\phi}^2 - l_{5\phi}^2, \quad (3)$$

$$\Delta q_i = ax_{6Ni} + by_{6Ni} + cz_{6Ni} - 1 = 0, \quad (4)$$

где  $l_{5\phi}$  – расстояние между точками  $N$  звена 6 и  $M_1$  центра сферы

$$l_{5\phi}^2 = (X_{M1} - X_{Ni})^2 + (Y_{M1} - Y_{Ni})^2 + (Z_{M1} - Z_{Ni})^2,$$

$a, b, c$  – коэффициенты уравнения приближающей плоскости.  $X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1}, X_{Ni}, Y_{Ni}, Z_{Ni}$  – соответствующие координаты точек  $M_1$  (центра сферы) и  $N$  звена 6 ( $EN$ ) в абсолютной системе координат  $OXYZ$ . По условию синтеза координаты точки  $N$  звена 6 ( $EN$ ), которому принадлежат локальные координаты выходной точки  $T_2$ , в абсолютной системе координат  $OXYZ$  определяются с использованием обобщенного метода символических обозначений преобразования координат [3] в виде

$$\begin{aligned} X_N &= x_{6N} \cos(\psi_6 + \psi_5) + z_{6N} \sin(\psi_6 + \psi_5) + X'_N, \\ Y_N &= -y_{6N} \cos \beta_6 + Y'_N, \end{aligned} \quad (5)$$

$$Z_N = x_{6N} \sin(\psi_6 + \psi_5) - z_{6N} \cos(\psi_6 + \psi_5) + Z'_N,$$

$$X'_N = a_{02} + a_{6,7} \cos \psi_6,$$

$$Y'_N = -b_{02} - b_{6,7}.$$

$$Z'_N = c_{02} + a_{6,7} \sin \psi_6.$$

Синтезу подлежат 10 неизвестных геометрических параметров кинематической цепи  $DENM$  механизма. Из них 7 параметров:  $x_{6N}, y_{6N}, z_{6N}, X_M, Y_M, Z_M, l_{NM}$  – параметры синтезируемого звена 5 ( $NM$ ) и 3 параметра  $X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1}$  – координаты центра сферы.

**Вычисление пяти параметров** рассмотрим на примере одного из вариантов:  $X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1}, y_{6N}, l_{NM1}$ .

Выражение взвешенной разности (3) с учетом уравнений координат точки  $N$  запишем в виде обобщенного полинома:

$$\begin{aligned} \Delta q &= p_1 f_1(\varphi_2, \psi_7) + p_2 f_2(\varphi_2, \psi_7) + \\ &+ p_3 f_3(\varphi_2, \psi_7) + p_4 f_4(\varphi_2, \psi_7) + \\ &+ p_5 f_5(\varphi_2, \psi_7) + p_3 p_4 f_6(\varphi_2, \psi_7) - F(\varphi_2, \psi_7), \end{aligned} \quad (6)$$

При решении задачи синтеза по методу интерполирования для пяти заданных положений механизма отклонения взвешенной разности должны равняться нулю. С учетом этого из выражения (6) имеем

$$\begin{aligned}
 & p_1 f_1(\varphi_{2i}, \psi_{7i}) + p_2 f_2(\varphi_{2i}, \psi_{7i}) + \\
 & + p_3 f_3(\varphi_{2i}, \psi_{7i}) + p_4 f_4(\varphi_{2i}, \psi_{7i}) + \\
 & + p_5 f_5(\varphi_{2i}, \psi_{7i}) + p_3 p_4 f_6(\varphi_{2i}, \psi_{7i}) - \\
 & - F(\varphi_{2i}, \psi_{7i}) = 0, \quad i = \overline{1, 5}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Решая систему уравнений (7) методом исключения неизвестных, получаем квадратное уравнение относительно неизвестного  $p_4$ :

$$k_1 p_4^2 + k_2 p_4 + k_3 = 0. \quad (8)$$

Решая уравнение (8), определяем геометрические параметры кинематической цепи  $DENM$  механизма по формулам:

$$\begin{aligned}
 X_{M1} &= p_1, \quad Y_{M1} = p_2, \quad Z_{M1} = p_3, \quad y_{5N} = p_4, \\
 l_{NM1} &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5}.
 \end{aligned}$$

**Вычисление остальных пяти параметров:**  $x_{6N}, z_{6N}, X_M, Y_M, Z_M$  проводим с использованием выражения взвешенной разности (4)

$$\Delta q_i = ax_{5Ni} + by_{5Ni} + cz_{5Ni} - 1 = 0, \quad i = \overline{1, 5}.$$

С учетом координат точки  $N$  запишем систему пяти уравнений в виде:

$$\begin{aligned}
 aX_{N1} + bY_{N1} + cZ_{N1} &= 1, \\
 aX_{N2} + bY_{N2} + cZ_{N2} &= 1, \\
 aX_{N3} + bY_{N3} + cZ_{N3} &= 1, \\
 aX_{N4} + bY_{N4} + cZ_{N4} &= 1, \\
 aX_{N5} + bY_{N5} + cZ_{N5} &= 1.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Из первых трех уравнений определяем коэффициенты приближающей плоскости

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \text{если } \Delta \neq 0. \quad (10)$$

Для решения задачи синтеза указанных пяти параметров составляем систему трех алгебраических уравнений, состоящих из двух уравнений системы (9) и квадратного уравнения (8). Решая полученную систему трех алгебраических уравнений, после соответствующих преобразований получим

$$\begin{aligned}
 & T_4(z^0)x^4 + T_3(z^1)x^3 + T_2(z^2)x^2 + T_1(z^3)x + \\
 & + T_0(z^4) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & S_6(z^0)x^6 + S_5(z^1)x^5 + S_4(z^2)x^4 + S_3(z^3)x^3 + \\
 & + S_2(z^4)x^2 + S_1(z^5)x + S_0(z^6) = 0,
 \end{aligned} \quad (11)$$

где  $x = x_{6N}, y = y_{6N}, z = z_{6N}$ .

Система уравнений (11) содержит неизвестные  $x$  и  $z$ . Исключая неизвестное  $x$ , получаем алгебраическое уравнение 24 степени относительно неизвестного  $z$ . Решая данное уравнение, находим вещественные решения относительно неизвестного, число которых определяется по теореме Штурма. Для положительных вещественных значений неизвестного  $z$  определяем значения остальных неизвестных  $x = x_{6N}, y = y_{6N}, X_M, Y_M, Z_M$ . Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы точки  $M_1$  к плоскости, определяет координаты  $X_M, Y_M, Z_M$  центра  $M$  приближающей окружности

$$\begin{aligned}
 X_M &= X_{M1} + Q_x d, \quad Y_M = Y_{M1} + Q_x d, \\
 Z_M &= Z_{M1} + Q_x d,
 \end{aligned} \quad (12)$$

где  $Q_x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, Q_y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$

$Q_z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$  – направляющие косинусы

оси вращательной пары в точке  $M$  звена 2;

$$d = \frac{aX_{M1} + bY_{M1} + cZ_{M1} - 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (13)$$

Длина звена 5 ( $NM$ ), т.е. радиус окружности, определяется по формуле

$$\begin{aligned}
 & l_{5(NM)\phi} = \\
 & = \sqrt{(X_M - X_N)^2 + (Y_M - Y_N)^2 + (Z_M - Z_N)^2}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, определены 10 геометрических параметров:  $x_{6N}, y_{6N}, z_{6N}, X_M, Y_M, Z_M, l_{NM}, X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1}$ .

Для решения задачи синтеза кинематической цепи  $ABCD$  механизма по заданным положениям выходной точки  $T_1$  звена 8 ( $BC$ ) [1], в котором приближающая окружность точки  $C$  радиусом  $l_{CD} = l_{7\phi}$  с центром в точке  $D$  звена 7 ( $CD$ ) определяется как линия пересечения сферы с ко-

ординатами  $X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}$  и плоскости, удобно использовать выражения взвешенных разностей [2]:

$$\Delta q = l_7^2 - l_{7\phi}^2, \quad (15)$$

$$\Delta q_i = ax_{8Ci} + by_{8Ci} + cz_{8Ci} - 1 = 0, \quad (16)$$

где  $l_{7\phi}$  – расстояние между точками  $C$  звена 8 и  $D_1$  центра сферы

$l_{7\phi}^2 = (X_{D1} - X_{Ci})^2 + (Y_{D1} - Y_{Ci})^2 + (Z_{D1} - Z_{Ci})^2$ ,  $a, b, c$  – коэффициенты уравнения приближающей плоскости.  $X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci}$  – соответствующие координаты точек  $D_1$  (центра сферы) и  $C$  в абсолютной системе координат  $OXYZ$ . По условию синтеза координаты точки  $C$  звена 8, которому принадлежат локальные координаты выходной точки  $T_1$ , в абсолютной системе координат  $OXYZ$  определяются с использованием обобщенного метода символических обозначений преобразования координат [3].

Синтезу подлежат 10 неизвестных геометрических параметров кинематической цепи  $ABCD$  механизма. Из них 7 параметров:  $x_{8C}, y_{8C}, z_{8C}, X_D, Y_D, Z_D, l_{CD}$  – параметры синтезируемого звена 7 ( $CD$ ) и 3 параметра  $X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}$  – координаты центра сферы.

**Вычисление пяти параметров** рассмотрим на примере одного из вариантов:  $X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, y_{8C}, l_{CD1}$ . Выражение взвешенной разности (15) с учетом координат точки  $C$  [3] запишем в виде обобщенного полинома

$$\Delta q = p_1 f_1(\phi_1, \psi_3) + p_2 f_2(\phi_1, \psi_3) + p_3 f_3(\phi_1, \psi_3) + p_4 f_4(\phi_1, \psi_3) + p_5 f_5(\phi_1, \psi_3) + p_3 p_4 f_6(\phi_1, \psi_3) - F(\phi_1, \psi_3). \quad (17)$$

При решении задачи синтеза по методу интерполирования для пяти заданных положений механизма отклонения взвешенной разности должны равняться нулю. С учетом этого из выражения (17) имеем

$$p_1 f_1(\phi_{1i}, \psi_{3i}) + p_2 f_2(\phi_{1i}, \psi_{3i}) + p_3 f_3(\phi_{1i}, \psi_{3i}) + p_4 f_4(\phi_{1i}, \psi_{3i}) + p_5 f_5(\phi_{1i}, \psi_{3i}) + p_3 p_4 f_6(\phi_{1i}, \psi_{3i}) - F(\phi_{1i}, \psi_{3i}) = 0, \quad i = \overline{1, 5}. \quad (18)$$

Решая систему уравнений (18) методом ис-

ключения неизвестных, получаем квадратное уравнение относительно неизвестного  $p_4$ :

$$k_1 p_4^2 + k_2 p_4 + k_3 = 0. \quad (19)$$

Решая уравнение (19), определяем геометрические параметры кинематической цепи  $ABCD$  механизма по формулам:

$$X_{D1} = p_1, \quad Y_{D1} = p_2, \quad Z_{D1} = p_3, \quad y_{8C} = p_4,$$

$$l_{CD1} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5}.$$

**Остальные пять параметров**  $x_{8C}, z_{8C}, X_D, Y_D, Z_D$  вычисляются с использованием выражения взвешенной разности (16)

$$\Delta q_i = ax_{8Ci} + by_{8Ci} + cz_{8Ci} - 1 = 0, \quad i = \overline{1, 5}. \quad (20)$$

Определяем коэффициенты  $a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, c = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ , если  $D \neq 0$ .

Для решения задачи синтеза указанных пяти параметров составляем систему трех алгебраических уравнений, состоящих из двух уравнений системы (20) и квадратного уравнения (19). После соответствующих преобразований получим

$$T_4(z^0)x^4 + T_3(z)x^3 + T_2(z^2)x^2 + T_1(z^3)x + T_0(z^4) = 0,$$

$$S_6(z^0)x^6 + S_5(z)x^5 + S_4(z^2)x^4 + S_3(z^3)x^3 + S_2(z^4)x^2 + S_1(z^5)x + S_0(z^6) = 0, \quad (21)$$

где  $x = x_{8C}, y = y_{8C}, z = z_{8C}$ .

Система уравнений содержит неизвестные  $x$  и  $z$ . Исключая неизвестное  $x$ , получаем алгебраическое уравнение 24 степени относительно неизвестного  $z$ . Решая данное уравнение, находим вещественные решения относительно неизвестного, число которых определяется по теореме Штурма. Для положительных вещественных значений неизвестного  $z$  определяем значения остальных неизвестных  $x = x_{8C}, y = y_{8C}$ . Аналогично, как показано выше, определяются координаты центра приближающей плоскости

$$X_D = X_{D1} + Q_x d, \quad Y_D = Y_{D1} + Q_x d,$$

$$Z_D = Z_{D1} + Q_x d.$$

Длина звена 7 ( $CD$ ), т.е. радиус окружности, определяется по формуле

$$l_{CD\phi} = \sqrt{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2}.$$

Отсюда по пяти заданным положениям механизма находятся десять параметров:  $x_{8C}$ ,

$$y_{8C}, z_{8C}, X_D, Y_D, Z_D, X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, l_{CD}.$$

Таким образом, по пяти заданным положениям двух выходных точек шатунных звеньев механизма определены 20 параметров:

$$x_{5N}, y_{5N}, z_{5N}, l_{NM}, X_M, Y_M, Z_M, X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1}, x_{3C}, y_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D, X_{D1},$$

$$Y_{D1}, Z_{D1}, l_{CD}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Зиновьев В.А.* Пространственные механизмы с низшими параи. М.: Гостехиздат, 1952. 432 с.
2. *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. М.: Госиздат, 1959. 1084 с.
3. *Шет и Уикер мл.* Обобщенная система символических обозначений механизмов // Конструирование и технология машиностроения. 1971. № 1. С. 96-106.

#### Резюме

Екі дәрежелі VI класты кеңістікті бағыттаушы механизмнің екі шатун буындарының шығыс нүктелерінің берілген бес жағдайына байланысты, интерполяция тәсіліне сүйене отырып, геометриялық параметрлерінің синтез есебі шешілген.

#### Summary

The task of synthesis of geometrical parameters of a spatial guide link two-moving mechanism of VI class upon five preset positions of output points of connecting rod links using the