УДК 530.12

М. М. АБДИЛЬДИН, М. Е. АБИШЕВ

КОРРЕКТНАЯ МЕТРИКА ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТЕЛА И ЕЕ СХОДИМОСТЬ

Рассмотрена корректная метрика первого приближения Фока и проведено ее сравнение с разложением в ряд точной центрально симметричной метрики одной сосредоточенной массы m_0. Показано, что они являются идентичными.

Для центрального тела или для одной сосредоточенной массы m_0 центрально-симметричная метрика первого приближения $\left(\sim \frac{1}{c^2}\right)$ имеет вид [1]

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right)dt^2 - $$

$$-\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right), \qquad (1)$$

где $U = \frac{\gamma m_0}{r}$ – ньютонов потенциал.

Эта метрика является корректной, ибо учитывает все члены порядка $\left(\sim \frac{1}{c^2}\right)$ в правой части (1), что не всегда делается [1]. Заметим, что нелинейность поля и неевклидовость пространственной метрики здесь проявляется одновременно. Она, можно сказать, однозначная метрика первого приближения, и получена в гармонической системе координат.

В этой заметке мы обсудим вопрос о сходимости рядов, представляющих компоненты метрических тензоров g_{00} и g_{ik}. Для этого запишем (1) в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{2U^2}{c^4}\right)c^2dt^2 - $$

$$-\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right). \qquad (2)$$

Введя обозначение

$$x = \frac{2U}{c^2}, \qquad (3)$$

имеем

$$ds^2 = \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)c^2dt^2 - $$

$$-(1 + x)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right). \qquad (4)$$

Теперь мы видим, что разложение

$$g_{00} = 1 - x + \frac{x^2}{2} \qquad (5)$$

можно аппроксимировать по разному в пределах рассматриваемого первого приближения $\left(\sim \frac{1}{c^2}\right)$.

Например

$$e^{-x} = \sum \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \ldots \qquad (6)$$

Имея ввиду (5) и (6), мы можем рассматриваемую метрику (4) написать в виде

$$ds^2 = e^{-\frac{2U}{c^2}}c^2dt^2 - e^{\frac{2U}{c^2}}\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right). \qquad (7)$$

С другой стороны, мы знаем, что существует точная, центрально-симметричная метрика для одной сосредоточенной массы m_0, полученная Фоком [2] и записанная им в прямоугольных гармонических координатах

$$ds^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)c^2dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^2\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right) - $$

$$-\left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)\frac{\alpha^2}{r^4}\left(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3\right)^2, \qquad (8)$$

где $\alpha = \frac{\gamma m_0}{c^2}$.

Запишем эту метрику в первом приближении, т.е. в правой части (8) оставим члены $\left(\sim \frac{1}{c^2}\right)$. В начале, как промежуточное выражение, имеем

$$ds^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)c^2dt^2 - $$

$$-\left(1 + \frac{2\alpha}{r}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right). \qquad (9)$$

Далее

$$g_{00} = \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right) = \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{-1} = \qquad (10)$$

$$= \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\alpha^2}{r^2}+\ldots\right) = 1-\frac{2\alpha}{r}+\frac{2\alpha^2}{r^2}+\ldots\ .$$

Учитывая (9) и (10), запишем корректную метрику первого приближения Фока в виде

$$ds^2 = \left(1-\frac{2U}{c^2}+\frac{2U^2}{c^4}\right)c^2dt^2 -$$

$$-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2\right). \qquad (11)$$

Таким образом, мы снова получили исходную метрику первого приближения (1).

При этом мы не должны забывать, что в рамках первого приближения метрика Фока допускает запись

$$ds^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)c^2dt^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)\left(dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2\right). \qquad (12)$$

Отсюда мы видим, что (12) и (7) идентичные формы метрики первого приближения Фока.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдильдин М.М.* Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата, 1988. 198 с.

2. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961. 563 с.

Резюме

Фоктың дұрыс бірінші жуықтау метрикасы қарастырылып, оны m_0 оқшауланған массаның орталық симметриялы метрикасының қатарға жіктелуімен салыстыру жүргізілген. Олардың өзара сәйкес екендігі көрсетілген.

Summary

In the work correct Fock's first approximation metrics considered and it was compared with exact centrally symmetric metrics of lumped mass m_0. It is shown, that they is identical.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 23.04.07г.