УДК 517.927.25

А. М. САРСЕНБИ

О БАЗИСНОСТИ РИССА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $-u''(-x)=\lambda u(x)$

Доказана базисность Рисса собственных функций одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом.

1. Введение.

В работе установлена базисность Рисса системы собственных функций дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом

$$-u''(-x)=\lambda u(x), \tag{1}$$

заданного на интервале $(-1,1)$ с краевыми условиями

$$u(-1)=0, \qquad u'(-1)=u'(1). \tag{2}$$

Введем следующее определение. Краевые условия

$$\begin{cases}\alpha_1 u'(-1)+\beta_1 u'(1)+\alpha_{11}u(-1)+\beta_{11}u(1)=0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{21}u(-1)+\beta_{21}u(1)=0,\end{cases} \tag{3}$$

для уравнения (1) будем называть регулярными, если

$$\alpha_1^2\neq\beta_1^2, \qquad \alpha_{21}^2\neq\beta_{21}^2, \qquad |\alpha_1|+|\beta_1|>0.$$

Можно показать, что система собственных и присоединенных функций дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом (1) с регулярными краевыми условиями (3) образует базис Рисса. Мы рассматриваем тот случай задачи (1), (3), когда $\alpha_1^2=\beta_1^2$, $\alpha_{11}=\beta_{11}=\beta_{21}=0$, т.е. краевые условия (2) являются нерегулярными в смысле введенного нами определения.

Если обе части уравнения (1) два раза продифференцировать по переменной x, то получим следующую обычную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$u^{IV}(x)=\lambda u(x), \qquad -1\le x\le 1, \tag{4}$$

$$u(-1)=0, \quad u'(-1)=u'(1), \quad u''(1)=0,$$
$$u'''(-1)=u'''(1). \tag{5}$$

Несложно убедиться в том, что краевые условия (5) являются регулярными, но не усиленно регулярными в смысле Биркгофа [1, с. 67].

Из сказанного следует, что собственные функции краевой задачи (1), (2) являются также собственными функциями краевой задачи (4), (5).

Перейдем к изложению результатов настоящей заметки.

2. Вычисление собственных функций.

Найдем собственные значения и собственные функции неклассической спектральной задачи

(1), (2). Линейно независимыми решениями уравнения (1) являются функции

$$u_1(x) = e^{\rho x} - e^{-\rho x}, \quad u_2(x) = e^{i\rho x} + e^{-i\rho x}, \quad \rho = \sqrt{\lambda}.$$

Функция

$$u(x) = a \cdot \left(e^{\rho x} - e^{-\rho x}\right) + b \cdot \left(e^{i\rho x} + e^{-i\rho x}\right)$$

также является решением уравнения (1). Вычислим производную этой функции и воспользуемся краевыми условиями (2).

$$u'(x) = a\rho \cdot \left(e^{\rho x} - e^{-\rho x}\right) + i\rho b \cdot \left(e^{i\rho x} - e^{-i\rho x}\right).$$

С помощью краевых условий (2) получим два равенства

$$\begin{cases} a \cdot \left(e^{-\rho} - e^{\rho}\right) + b \cdot \left(e^{-i\rho} + e^{i\rho}\right) = 0, \\ i\rho b \cdot \left(e^{-i\rho} - e^{i\rho}\right) = i\rho b \cdot \left(e^{i\rho} - e^{-i\rho}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Здесь мы выделяем два случая: 1) $b = 0$; 2) $b \neq 0$.

В случае $b = 0$ из первого равенства в (6) имеем

$$a \cdot \left(e^{-\rho} - e^{\rho}\right) = 0 \text{ или } \rho = k\pi i.$$

В случае $b \neq 0$ из второго равенства в (6) получаем

$$\left(e^{i\rho} - e^{-i\rho}\right) = 0 \text{ или } \rho = k\pi.$$

Мы приходим к следующему заключению.

Лемма. Обобщенная спектральная задача (1), (2) имеет две серии собственных значений:

$$\lambda_k^{(1)} = -(k\pi)^2, \quad \lambda_k^{(2)} = (k\pi)^2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Все собственные значения однократны.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

1) собственному значению $\lambda_0 = 0$ соответствует собственная функция $u_0(x) = x + 1$;

2) собственным значениям первой серии отвечают собственные функции

$$u_{k1}(x) = \sin k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

3) второй серии собственных значений отвечают собственные функции

$$u_{k2}(x) = (-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Итак, мы имеем следующую систему собственных функций задачи (1), (2)

$$u_0(x) = x + 1, \; u_{k1}(x) = \sin k\pi x,$$

$$u_{k2}(x) = (-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Биортогонально сопряженной к этой системе является система

$$v_0(x) = \frac{1}{2}, \; v_{k1}(x) = \cos k\pi x,$$

$$v_{k2}(x) = (-1)^k \frac{e^{k\pi x} + e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \sin k\pi x, \qquad k = 1, 2, ..,$$

которая состоит из собственных функций сопряженной задачи

$$v''(-x) = \overline{\lambda} v(x), \qquad v'(-1) = 0, \qquad v(-1) = v(1). \tag{7}$$

В биортогонально сопряженных системах с функциями $u_{k1}(x)$ в паре стоят функции $v_{k2}(x)$, а в паре с функциями $u_{k2}(x)$ стоят функции $v_{k1}(x)$, т.е.

$$(u_0(x), v_0(x)) = 1, \quad (u_{k1}(x), v_{k2}(x)) = 1,$$

$$(u_{k2}(x), v_{k1}(x)) = 1,$$

а все оставшиеся комбинации скалярных произведений равны нулю.

3. Основной результат.

Теорема. Система

$$\left\{ x - 1, \quad \sin k\pi x, \quad (-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x \right\}, \tag{8}$$

состоящая из собственных функций обобщенной спектральной задачи (1), (2), образует базис Рисса.

Как известно, если одна из биортогонально сопряженных систем образует базис пространства L_2, то другая тоже [2, с. 440]. Поэтому из сформулированной теоремы следует, что биортогонально сопряженная система

$$\left\{ \frac{1}{2}, \quad \cos k\pi x, \quad (-1)^k \frac{e^{k\pi x} + e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \sin k\pi x \right\}, \tag{9}$$

состоящая из собственных функций сопряженной задачи (7), также образует базис Рисса.

Доказательство. Для доказательства базисности Рисса системы (8) достаточно доказать бесселевость каждой из систем (8) и (9),, т.е. справедливость неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(f, \quad \sin k\pi x)\right|^2 < \infty, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(f, \quad (-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x\right)\right|^2 < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f,\quad \cos k\pi x\right)\right|^2<\infty, \qquad (11)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f,\quad (-1)^k\frac{e^{k\pi x}+e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}+\sin k\pi x\right)\right|^2<\infty$$

для любой функции $f(x)\in L_2(-1,1)$.

Первые из неравенств и в (10) и в (11) хорошо известны, так как они представляют собой неравенство Бесселя для ортонормированной системы. Докажем второе неравенство в (10), а второе неравенство в (11) доказывается совершенно аналогично. Так как

$$\left|\left(f,\quad (-1)^k\frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}+\cos k\pi x\right)\right|^2\le$$

$$\le 2\left|\left(f,\quad \frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\right)\right|^2+2\left|\left(f,\ \cos k\pi x\right)\right|^2$$

и второе слагаемое в правой части есть коэффициенты Фурье по ортонормированной системе, то нам достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f,\quad \frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\right)\right|^2. \qquad (12)$$

Рассмотрим общий член этого ряда и преобразуем его

$$\left|\left(f,\quad \frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\right)\right|=\left|\int_{-1}^{1}f\,\frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}dx\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\left\{\int_{-1}^{1}fe^{k\pi x}dx-\int_{-1}^{1}fe^{-k\pi x}dx\right\}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\int_{-1}^{0}fe^{k\pi x}dx+\int_{0}^{1}fe^{k\pi x}dx-\int_{-1}^{0}fe^{-k\pi x}dx-\int_{0}^{1}fe^{-k\pi x}dx\right\}\right|\le$$

$$\le 2\left|\left\{\int_{0}^{1}[f(-x)-f(x)]e^{-k\pi(x+1)}dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{0}^{1}[f(x)-f(-x)]e^{k\pi(x-1)}dx\right\}\right|.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f,\quad \frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\right)\right|^2\le$$

$$\le 2\left|\left\{\int_{0}^{1}[f(-x)-f(x)]e^{-k\pi(x+1)}dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{0}^{1}[f(x)-f(-x)]e^{k\pi(x-1)}dx\right\}\right|^2.$$

К правой части полученного соотношения применяем лемму 5 из работы [3], на основании которой получаем сходимость ряда (12). Тем самым доказательство теоремы закончено.

Из доказанной теоремы вытекает следующее важное следствие.

Следствие. Система собственных функций спектральной задачи (4), (5) для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с регулярными (но не усиленно регулярными) краевыми условиями образует базис Рисса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.

2. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., 1958. 507 с.

3. *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1964. №2. С. 82-93.

Резюме

Ауытқыған аргументті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің меншікті функцияларының Рисс базисі болатындығы дәлелденген.

Summary

Riss basisnes of root functions of one boundary problem for differential equation with deviated argument have been proved in the work.

Поступила 17.04.07г.