УДК 539

Н. Ж. ТАКИБАЕВ

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ЛЕГКОЙ ЧАСТИЦЫ НА ДВУХ ФИКСИРОВАННЫХ ЦЕНТРАХ

Введение. Задача нерелятивистского рассеяния легкой частицы на двух тяжелых частицах в пределе $\zeta = m/M \to 0$, где m и M – массы легкой и тяжелой частиц, относится к классу решаемых моделей, если парные потенциалы взаимодействия между частицами берутся в сепарабельной форме (см., например, [1]). В отсутствии взаимодействия между тяжелыми частицами полное решение задачи еще больше упрощается и проводится до конца, т.е. решение представимо в аналитическом виде. Ниже показывается, что в задаче рассеяния легкой частицы двумя центрами, фиксированными в конфигурационном пространстве, решение для амплитуды рассеяния можно записать в явной форме и исследовать эволюцию и условия появления в трехчастичной системе связанных, виртуальных или резонансных состояний.

Существенно отметить, что решения для трех частичной системы определяются в области положительных полных энергий – области, где поиск решений чрезвычайно затруднителен. Причинами этих трудностей, имеющих технический характер, являются, в общем случае, как слабая сходимость сумм по парным парциальным компонентам в перекрестных каналах, так и наличие «движущихся» логарифмических особенностей в ядрах интегральных уравнений, обход которых представляет собой достаточно громоздкую процедуру [2, 3].

В предлагаемом здесь методе применяются два упрощающих момента – парные сепарабельные потенциалы, обрывающие ряд последовательных приближений в задаче двух тел, и предел $\zeta \to 0$, ведущий к развязке кинематических переменных между разными парами частиц. В результате возникает система уравнений для системы трех частиц, которая может быть решена до конца.

Найденные аналитические решения могут служить моделью построения главного приближения для многих задач, интересных в практическом отношении. Поправки же к главному приближению тогда можно определять методом последовательных итераций. Как известно, сходимость в этом случае будет более быстрой – экспоненциальной, а не степенной как в обычной теории возмущений [2, 4]. Однако, так же, как и в вариационных методах, важным при этом будет исходный базис, решения которого должны сходиться к данному точному решению. В противном случае главное приближение может оказаться в области сходимости соседнего или локального ложного минимума [5].

Параметры парных подсистем. Отсылая за подробностями к работе [1], дадим здесь необходимые определения. Будем считать частицу *1* легкой, а частицы под номерами *2* и *3* – тяжелыми.

Тогда, в пределе $\zeta \to 0$, полная энергия системы будет равна

$$Z = \sum_i \; p_{0i}^2 / m_i \to p_{01}^2 / m \,, \qquad (1)$$

где $\vec{p}_{01} = \vec{p}_0$ – импульс легкой частицы.

Рассмотрим пример простых парных сепарабельных потенциалов взаимодействия: $V_i = |\nu_i > \lambda_i < \nu_i|$, где λ_i – константа связи, а i – номер взаимодействующей пары (например, $i = 2$ означает взаимодействие между частицей *1* и *3*). Форм-факторы парных взаимодействий между легкой и тяжелой частицами, в пределе $\zeta \to 0$ существенно упрощаются по виду. Так, для пары номера 3 получаем:

$$< \nu(\vec{q}_{12}) \,| \to < \nu(\vec{p})\,| , \qquad (2)$$

т.к. $\vec{q}_{12} = (m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2)/(m_1 + m_2) \to \vec{p}_1 = \vec{p}$. Здесь $\vec{p}_1 = \vec{p}$ – импульс легкой частицы в текущем, например, промежуточном состоянии. Парные t-матрицы для сепарабельных потенциалов определяются, как известно, до конца и могут быть записаны в аналитическом виде:

$$t_i = |\nu_i > \eta_i < \nu_i| ,$$

$$\eta_i^{-1} = 1/\lambda_i - < \nu_i \,|\, G_0 \,|\, \nu_i > . \qquad (3)$$

Отметим, что коэффициенты усиления – η_2 и η_3 в t-матрицах соответствующих пар (3) будут зависеть только от начальных параметров задачи, т.е. $\eta_2 = \eta_3 \to \eta(p_0)$.

Рассмотрим волновую функцию системы двух тяжелых частиц, фиксированных в конфигурационном пространстве. Будем считать, что частица 2 фиксирована в точке $\vec{R}_2$, а частица 3 в точке $\vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{b}$.

Исходя из нормировки $<\Psi_2 \mid \Psi_2> = 1$ для частицы локализованной в определенной ограниченной области, введем волновую функцию Ψ_2 в виде:

$$\Psi_2(\vec{r}) = C \cdot \exp[-a^2(\vec{r} - \vec{R}_2)^2 / 2], \quad (4)$$

где $C^2 = a^3 / \pi^{3/2}$. Аналогичное выражение запишем и для волновой функции Ψ_3. При этом предполагается, что в конечных выражениях будет взят предел: $a \to \infty$, с тем, чтобы «сжать» эту ограниченную область и фиксировать тяжелые центры в точках $\vec{R}_2$ и $\vec{R}_3$.

Точные решения задачи рассеяния на двух фиксированных центрах. Приведем далее выражение для трехчастичной T-матрицы, отвечающей рассматриваемой задаче: $T = \sum T_{ij}$, $i, j = 2{,}3$, где

$$T_{ij} = |\nu_i> (\eta_i \quad \delta_{ij} + \eta_i \quad M_{i,j} \quad \eta_j) < \nu_j|, \quad (5)$$

а величина M_{ij} есть решение уравнения:

$$M_{ij} = \Lambda_{ij} + \sum_{l=2,3} \Lambda_{il} \eta_l M_{lj}. \quad (6)$$

Здесь потенциал Λ_{ij} при $\zeta \to 0$ сводится к следующей форме:

$$\Lambda_{ij} = 2m \frac{\nu_i(\vec{p}) \cdot \nu_j(\vec{p})}{(p_0^2 - p^2 + i\gamma)} = f(\vec{p}),$$

$$i \neq j, \quad \vec{p} = \vec{p}_1, \quad (7)$$

причем $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$. Этот потенциал можно переписать в более удобной форме (см., например, [1]):

$$\Lambda_{ij} = \int d\vec{r} \exp(i\vec{r}\vec{p}_2) J(r; p_0) \exp(i\vec{r}\vec{p}_3), \quad (8)$$

где для простоты опущены индексы i и j, и

$$J(r; p_0) = \int d\vec{p} \exp(i\vec{r}\vec{p}) f(\vec{p}). \quad (9)$$

Фурье преобразование уравнения (6) приведет тогда к следующему уравнению в конфигурационном пространстве [1]:

$$M(\vec{r}, \vec{r}') = J(r; p_0)\delta(\vec{r} + \vec{r}') +$$
$$+ J(r; p_0)\eta(p_0) M(-\vec{r}, \vec{r}'). \quad (10)$$

Это уравнение является алгебраическим, а не интегральным, и его решение находится тривиально. Запишем решение (10) в аналитической форме:

$$M(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{K^0(\vec{r}, \vec{r}')}{1 - K(r)\eta(p_0)}, \quad (11)$$

где величина $K^0(\vec{r}, \vec{r}')$ представляет собой обобщенную функцию и выражается через δ-функции:

$$K^0(\vec{r}, \vec{r}') = J(r; p_0)\delta(\vec{r} + \vec{r}') +$$
$$+ J(r; p_0)\eta(p_0) J(-r; p_0)\, \delta(-\vec{r} + \vec{r}'), \quad (12)$$

а $K(\vec{r})$ является произведением обычных функций:

$$K(\vec{r}) = J(r; p_0)\eta(p_0) J(-r; p_0). \quad (13)$$

В случаях, когда парные взаимодействия представляют собой сумму нескольких членов, выражения (9)–(13), нужно понимать как матричные по соответствующим индексам.

Для того, чтобы теперь определить физическую амплитуду рассеяния, следует взять решение (11) в обкладках волновых функций Ψ_i и Ψ_j из (4) и перейти к пределу $a \to \infty$. Этот предел в дополнение к δ-функциональной зависимости величины $M_{ij}(\vec{r}, \vec{r}')$ позволяет определить решение до конца.

Например, ограничиваясь S-волновыми компонентами в парных взаимодействиях, нетрудно получить из (9)-(13):

$$<\Psi_{\vec{R}}(\vec{r}) | M(\vec{r}, \vec{r}') | \Psi_{\vec{R}'}(\vec{r}')> =$$
$$= \frac{N(b; p_0)}{D(b; p_0)} \equiv M(b; p_0), \quad (14)$$

где

$$N(b; p_0) = J(b/2; p_0) +$$
$$+ J(b/2; p_0)\eta(p_0) J(-b/2; p_0), \quad (15)$$

и

$$D(b;p_0)=1-J(b/2;p_0)\eta(p_0)J(-b/2;p_0)\eta(p_0), \tag{16}$$

а величина $b=|\vec{b}|$ – есть расстояние между рассеивающими центрами, т.е. $\vec{b}=\vec{R}_2-\vec{R}_3$.

Считая $J(r;p_0)$ четной функцией относительно замены $\vec{r}\to-\vec{r}$, получим более простое по виду решение:

$$M(b;p_0)=\frac{J}{1-\eta\cdot J}, \tag{17}$$

где $J\equiv J(b/2;p_0)$ и $\eta\equiv\eta(p_0)$.

Наличие других парциальных компонент в парных силах, а также представление парных сил суммой нескольких сепарабельных членов не приводит к кардинальным затруднениям – усложнения будут состоять в учете матричных форм в (11)–(13) и учете коэффициентов пересвязки между различными парными состояниями.

Заметим, что полная амплитуда $f(\vec{p},\vec{p}\,')$ будет равна:

$$f(\vec{p},\vec{p}\,')=\sum_i \nu_i(\vec{p})\eta_i\nu_i(\vec{p}\,')+$$

$$+\sum_{ij}\nu_i(\vec{p})\eta_i M_{ij}\eta_j\nu_j(\vec{p}\,'). \tag{18}$$

Здесь $i,j=2,3$, причем первая сумма справа отвечает сумме независимых амплитуд рассеяния легкой частицы на каждом из рассеивающих центров, а вторая сумма – трехчастичной амплитуде многократного рассеяния на двух этих центрах. Предполагается, как обычно, что в общем случае амплитуда $f(\vec{p},\vec{p}\,')$ должна быть результатом суммирования по конечным и усреднения по начальным парным состояниям системы.

Важно отметить, что нули функции $D(b;p_0)$ в (16) отвечают особенностям трехчастичной амплитуды так же, как нули функции η^{-1} отвечают особенностям парных амплитуд в (3). В зависимости от того, где эти нули расположены, т.е. на положительной или отрицательной мнимой полуоси значений p_0 или в комплексной нижней полуплоскости, особенности амплитуд будут отвечать связанным, виртуальным или резонансным состояниям, соответственно.

Особенности в случае точечных парных потенциалов.

Приведем решения для величин η и J. Полагая парный потенциал в S-волне равным $\nu(p)=\sqrt{4\pi/m\beta}/(1+p^2/\beta^2)$, где β^{-1} – есть радиус действия парных сил, а $k\equiv p_0/\beta$, получим:

$$\eta^{-1}=1/\lambda\ +1/(1-ik)^2, \tag{19}$$

и, соответственно,

$$J(b/2;k)=\frac{\exp(-\tilde{b}/2)-\exp(i\tilde{b}k/2)}{\tilde{b}\ (1+k^2)^2}+$$

$$+\frac{\exp(-\tilde{b}/2)}{1+k^2}, \tag{19}$$

где $\tilde{b}\equiv b\beta$ является безразмерной величиной. Тогда для функции $D(b;k)$ следует выражение:

$$D(b;k)=1-J(b/2;k)\eta(k)=$$

$$=1-\left[\frac{1}{\tilde{b}}\cdot\frac{\exp(-\tilde{b}/2)-\exp(i\tilde{b}k/2)}{(1+k^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp(-\tilde{b}/2)}{1+k^2}\right]\frac{1}{1/\lambda+1/(1-ik)^2}. \tag{20}$$

Обращение в нуль правой части (20) имеет ряд ограничений на положение этих нулей в комплексной плоскости k. Например, константа связи по определению является вещественной величиной, что диктуется свойствами сохранения унитарности и микропричинности уже на двухчастичном уровне [6]. Это, в свою очередь, ведет к запрету пересечения нулями функции $D(b;k)$ действительной оси комплексных k, т.е. к запрету значений $k_I=\mathrm{Im}(k)=0$ для нулей функции $D(b;k)$ при любых $k_R=\mathrm{Re}(k)$, вещественных λ и положительных b. Что касается нулей функция $D(b;k)$ на мнимой оси, т.е. при $k_R=0$, то они дают связь между λ и величиной k_I:

$$\lambda=-2k_I\frac{1-k_I^2}{1-k_I\,(1+\exp(-\tilde{b}/2))+\exp(-k_I\tilde{b}/2)}. \tag{21}$$

Т.е. соотношение (21) будет определять положение связанного или виртуального состояния для легкой частицы в системе двух фиксированных центров.

Рассмотрим, далее, как пример задачу с точечным взаимодействием между легкой частицей и любым из фиксированных центров. Такой тип парного взаимодействия часто называют контактным или имеющим форму δ-функции, соответственно его виду в конфигурационном пространстве. Решение можно получить из (19), переходя к пределу $\beta \to \infty$ и полагая $\lambda = -(1+\kappa_0/\beta)^2$. Тогда $E = -\kappa_0^2/2m$ – будет энергией связи пары, если $\kappa_0 \geq 0$, или энергией виртуальной связи, если $\kappa_0 < 0$. Функция $D(b;k)$ принимает простой вид:

$$D = 1 + 2\frac{\exp[ip_0 b/2]}{b(\kappa_0 + ip_0)}. \qquad (22)$$

Отсюда следует, что для связанных или виртуальных состояний легкой частицы в системе двух фиксированных центров имеет место соотношение

$$x_0 = x_I - \exp[-x_I], \qquad (23)$$

где $x_I = b\,\mathrm{Im}(k)/2$ и $x_0 = b\kappa_0/2$.

Отметим, что $x_I > x_0$, т.е. связность в трехчастичной системе всегда больше, чем связность в парной системе. Поэтому легкая частица может быть связана двумя фиксированными центрами, даже в тех случаях, когда на одиночном центре легкая частица будет еще не связана. Условием существования связанного трехчастичного состояния будет: $x_0 > -1$, что возможно при любом значении $\lambda \leq 0$. При этом значение b будет определяться рекуррентным соотношением (23).

Что касается квазистационарных состояний, то для них значения x_I и x_R ($x_R = b\,\mathrm{Re}(k)/2$) могут быть найдены из соотношений:

$$x_I - x_0 \quad \cos(x_R)\cdot\exp[-x_I] - \frac{\sin(x_R)}{x_R} = \exp[x_I]. \qquad (24)$$

Отсюда нетрудно получить, что для квазистационарных состояний всегда $x_I < 0$, т.е. особенности будут находиться в нижней полуплоскости комплексных значений x ($x = x_R + i\cdot x_I$) и, соответственно, значений k.

Симметрия соотношений (24) относительно замены $x_R \leftrightarrow -x_R$ свидетельствует также о том, что особенности лежат симметрично относительно мнимой полуоси x_I. Область, где возникают квазистационарные состояния, соответствует значениям $x_0 < 0$ и $|x_R| > \pi$, и она не перекрывается с областью связанных и виртуальных состояний.

Отметим, что еще более богатый спектр состояний будет возникать в задачах, где, наряду с S-волновым парным взаимодействием, имеются взаимодействия и в других парциальных волнах. Здесь особый интерес вызывают процессы рассеяния нейтронов на кристаллических структурах. Это связано с тем, что взаимодействие нейтронов с многими тяжелыми ядрами характеризуется наличием резонансов в высших парциальных волнах и P-нечетными эффектами, обязанными слабым взаимодействиям.

Предлагаемый в данной работе метод позволяет найти новые трех частичные резонансные точки, вычленить нечетные части амплитуд и выявить новый динамический способ усиления P-нечетных эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Такибаев Н.Ж.* // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2007. №3.

2. *Беляев В.Б.* Лекции по теории малочастичных систем. М.: Энергоатомиздат, 1986.

3. *Takibayev N.Zh.* // Physics of Atomic Nuclei. 2000. V. 63. P. 574-581.

4. *Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д.* Квантовая механика трехчастичных систем. М.: Наука, 1987.

5. *Зубарев А.Л.* Вариационный принцип Швингера в квантовой механике. М.: Энергоиздат, 1981.

6. *Киржниц Д.А., Крючков Г.Ю., Такибаев Н.Ж.* // ЭЧАЯ. 1979. Т. 10. С. 741.

Резюме

Жеңіл бөлшектің екі бекітілген центрде шашырау есебінің нақты шешімі анықталған және жеңіл бөлшек пен центр арасындағы қос күштер сепарабельді формада болғанда байланысқан, виртуальды және квазистационарлық күйлердің пайда болу жағдайлары қарастырылды. Нүктелік қос потенциалдар жағдайы үшін шашырау амплитудасының ерекшеліктеріне талдау жасалды.

Summary

In a problem of scattering of a light particle on two fixed centers are defined exact decisions and conditions of occurrence connected, virtual and quasi stationary conditions when pair forces between a light particle and the center have separable form are studied. Features of amplitudes of scattering for a case of point pair potentials are analyzed.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 28.04.07г.