Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

1. Постановка задачи нестационарной фильтрации. При математическом моделировании процесса отбора жидкости через скважину с заданным расходом приходится решать задачу для параболического уравнения с нелокальным граничным условием [1].

Будем рассматривать процесс притока однородной жидкости к скважине Ω_0 в замкнутой системе. Пусть система вначале находится под давлением u_0, а с момента $t = 0$ начинается отбор жидкости через Ω_0. При этом задача сводится к решению параболического уравнения [1]:

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t} = div(K(x)\nabla u), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

при условии

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u\big|_S = P(t), \quad \int_S K(x)\frac{\partial u}{\partial n} dS = Q(t). \tag{4}$$

Здесь S – граница области Ω_0, Ω_0 – скважина, Ω_0 – строго содержащаяся в Ω, $S \cap \Gamma = \varnothing$, β – коэффициент совместной упругоемкости фильтрующейся жидкости и пористой среды. $K = K_* / \mu$, K_* – проницаемость пласта, μ – коэффициенты динамической вязкости жидкости, $P(t)$ – неизвестная функция, зависимая только от времени. Условие (4) означает, что на S поддерживается давление, которое определяется по заданному дебиту Q. Задача (1)–(4) – нелокальная. Непосредственное применение классических приближенных методов затруднительно. Здесь область Ω имеет две границы – внешнюю границу Γ и внутреннюю границу S. В настоящей работе предлагается приближенный метод, который эффективно решает задачу (1)–(4) на компьютере. Дальнейшие обозначения взяты из работы [2].

2. Обобщенные решения задач (1)–(4). Некоторые априорные оценки. Умножим уравнение (1) на и проинтегрируем по области Ω. Используя формулу Грина, имеем

$$\frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + K_0\|\nabla u\|^2 = \int_S K\frac{\partial u}{\partial n}udS. \qquad (5)$$

Далее, преобразуем правую часть уравнения

$$\int_S K\frac{\partial u}{\partial n}udS = P(t)\int_S \frac{\partial u}{\partial n}KdS = P(t)Q = \frac{Q}{mesS}\int_S PdS .$$

Из последнего тождества, используя теорему вложения и ε-неравенство Коши [2], имеем

$$\frac{Q}{mess}\int_S pdS \le \frac{Q}{mesS}\|p\|_{L_{1(S)}} \le$$

$$\le \frac{Q}{mesS}\left(\|u\|^{1/2}_{L_2(\Omega)}\|\nabla u\|^{1/2}_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\right) \le$$

$$\le \varepsilon\|\nabla u\|^2 + \frac{Q}{mesS}C_\varepsilon\left(\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\right). \qquad (6)$$

Из (5), используя (6) и подбирая ε малым, получим

$$\max_{0\le t\le T}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^T \|\nabla u\|^2 dt \le C\|u_0\|^2. \qquad (7)$$

Умножим (1) на $div(K(x)\nabla u)$ в $L_2(\Omega)$, в результате получим

$$\frac{1}{2}\beta\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|divK(x)\nabla u\|^2 = \int_S \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial t}dS = 0. \quad (8)$$

Преобразуем интеграл правой части (8)

$$\int_S K(x)\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial t} = \int_S K(x)\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial P}{\partial t}dS = \frac{\partial P(t)}{\partial t}Q(t) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(u_* QH) - u_*(t)\frac{\partial Q}{\partial t}. \qquad (9)$$

Используя (9), проинтегрируем (8) по t, рассуждая также, как и при получении оценки (7), имеем

$$\|\nabla u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|divK(x)\nabla u\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le C < \infty. \quad (10)$$

Обращаясь к уравнению (1), в силу (10), выводим

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le C < \infty. \qquad (11)$$

Вводим пространство

$$m(\Omega) = \left\{\varphi \in C^2(\Omega),\quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0,\quad \varphi\big|_S = const\right\}.$$

Замыкание $m(\Omega)$ в норме $W_2^1(\Omega)$ обозначим через $\hat{W}_2^1(\Omega)$.

Определение. *Обобщенным решением задач (1)–(4) называется функция* $u \in L_2(0,T;\hat{W}_2^1(\Omega))$, *удовлетворяющая следующему интегральному тождеству*

$$\int_0^T\left[\beta(u,\varphi_t)_\Omega - (K\nabla u,\ \nabla\varphi)_\Omega + \frac{Q(t)}{mesS}\int_S \varphi dS\right]dt +$$

$$+(u_0,\varphi)_\Omega,$$

$$\forall\varphi \in C^2(0,T:\hat{W}_2^1(\Omega)),\ \varphi(T) = 0. \qquad (12)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $Q(t) \in L_2(0,T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, $K(x) \in C^1(\overline{\Omega})$. **Тогда существует единственное обобщенное решение задач (1)–(4) и для решения имеет место оценка (7).**

Теорема доказывается методом Галеркина с использованием оценки (7).

3. Экономичный приближенный метод для задач (1)–(4). Рассмотрим вспомогательную задачу (метод фиктивных областей)

$$\beta\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = div(K^\varepsilon\nabla u^\varepsilon) + \frac{Q(t)}{mesS}mes\Omega_0\xi(x),$$

$$x \in Đ \quad \overline{\Omega} \cup \Omega_0 \qquad (13)$$

с начально-краевым условием

$$u^{\varepsilon}\big|_{t=0} = u_0(x), \tag{14}$$

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{15}$$

где

$$\xi_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ 1, & x \in \Omega_0, \end{cases} \quad K^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} K(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & x \in \Omega_0, \end{cases} \tag{16}$$

и с условиями согласования

$$\left[u^{\varepsilon}\right]_S = 0, \quad \left[K^{\varepsilon}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial n}\right]_S = 0, \tag{17}$$

где [,] означает скачок значения функции через границу S; $u_0(x)$ – продолжим в Ω_0 с сохранением нормы.

Далее, определим обобщенное решение задач (13)–(17). Обозначим $W(D)$ – пространство, определяемое нормой

$$\|u\|_{W(D)} = \|u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \int_0^T\int_D K^{\varepsilon}(x)|\nabla u|^2 dxdt.^2$$

Определение. *Обобщенным решением задач (13)–(17) называется функция* $u^{\varepsilon} \in L_2(0,T;W(D))$, *удовлетворяющая следующему интегральному тождеству:*

$$\int_0^T\int_D (\beta u^{\varepsilon}, \varphi_t)dxdt - \int_0^T\int_D K^{\varepsilon}(x)(\nabla u^{\varepsilon}\nabla\varphi)dxdt + \tag{18}$$

$$+\int_0^T\int_D\left(\frac{Q(t)mes\Omega_0}{mesS}\xi_1(x)\varphi\right)dxdt + \int_D u_0\varphi(x)dx = 0.$$

Для каждого $\varphi_t \in L_2(0,T;L_2(D))$, $\varphi \in L_2(0,T;W_2^1(D))$, $\varphi(T) = 0$.

Априорные оценки. Умножим (12) на u^{ε} и, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}\|u^{\varepsilon}\|^2_{L_2(D)} + \int_D K^{\varepsilon}|\nabla u^{\varepsilon}|^2 dx = \frac{Q(t)}{mesS}mes\Omega_0\int_{\Omega_0} udx. \tag{19}$$

Отсюда следует оценка

$$\|u^{\varepsilon}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \int_0^T\int_D K^{\varepsilon}|\nabla u^{\varepsilon}|^2 dx \le$$

$$\le C\int_0^T\left(\frac{Q(t)mes\Omega_0}{mesS}\right)^2 dt + \|u_0\|^2 \le C < \infty. \tag{20}$$

Теорема 2. Пусть $Q(t) \in L_2(0,T)$; $u_0 \in L_2(D)$, $K(x) \in C^1(\Omega)$. **Тогда существует единственное обобщенное решение задач (13)–(17) и для решения справедлива равномерная по ε оценка (20).**

Теорема 2 доказывается методом Галеркина с использованием (20).

В силу оценки (20) из последовательности можно выделить подпоследовательности, для которых справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} &u^{\varepsilon}(t) \to u(t) \ \ \textit{слабо в} \ \ L_2(0,T;W_2^1(D)), \\ &u^{\varepsilon}(t) \to u(t) \ \ \textit{*слабо в} \ \ L_\infty(0,T;L_2(D)) \end{aligned} \tag{21}$$

при $\varepsilon \to 0$. Соотношение (21) позволяет перейти к пределу $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (18). В пределе получим интегральное тождество для $u(t)$, которое является обобщенным решением задач (1)–(4).

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и $u_0(x) \in W_2^1(D)$. Тогда обобщенное решение задач (13)–(17) сходится к обобщенному решению задач (1)-(4) при $\varepsilon \to 0$ со скоростью

$$\|u^{\varepsilon} - u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \le C\varepsilon. \tag{22}$$

Оценка (22) неулучшаемая.

Аппроксимируем задачу (13)–(17)

$$\beta\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = div(K^{\varepsilon}\nabla u^{n+1}) +$$

$$+\frac{Q^{n+1}(t)mes\Omega_0}{mesS}\xi(x), \quad x \in D, \tag{23}$$

$$u^0 = u_0(x), \tag{24}$$

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{25}$$

Заметим: относительно получим эллиптическое уравнение с быстро меняющимися коэффициентами $K^{\varepsilon}(x)$. Для численного решения задач (23)–(25) можно использовать экономичный итерационный метод [3], скорость сходимости которого не зависит от ε, или модифицировать по переменно-треугольному методу [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М.* Движения жидкости и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 221 с.

2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

3. *Бугров А.Н.* Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск, 1978. С. 24-35.

4. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1970.

Резюме

Локальді емес шектік шарты бар фильтрацияның бір моделінің жуықталған әдісі ұсынылады. Есептің жалпы шешімінің бар боллу теоремасы дәлелденді. Жалған облыстар әдісі негізделді.

Summary

In this article there are presented approximate method for one filtration model with non-local marginal conditions. The theorem of existence of the generalized solution of problems is being proved. It is given substantiations of a method of fictitious areas.

Поступила 4.03.07г.