М. А. САДЫБЕКОВ, А. М. САРСЕНБИ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ЦЕПОЧЕК ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Предлагаются новые формулы для построения цепочек присоединенных функций, которые получены путем развития теории присоединенных функций, построенной М. В. Келдышем.

Значительное место в спектральных вопросах теории несамосопряженных уравнений занимает теория присоединенных функций, предложенная М. В. Келдышем [1, 2] (см. также [3, с. 27] и установленный им факт полноты так построенной системы собственных и присоединенных функций широкого класса несамосопряженных уравнений). Согласно этой теории, присоединенные функции обыкновенного дифференциального оператора L порядка n в случае, когда коэффициенты оператора L не зависят от спектрального параметра λ, можно определить следующим образом:

$$Lu_0 = \lambda_0 u_0,\ L\,u_1 = \lambda_0 u_1 + u_0,\ \ldots,$$
$$L\,u_S = \lambda_0 u_S + u_{S-1}. \qquad (1)$$

В теории линейных функциональных уравнений [4, с.179] совокупность N_λ всех векторов f, которые при каком-нибудь натуральном m удовлетворяют уравнению

$$(A-\lambda E)^m f = 0$$

(где A – вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве; λ – собственное значение оператора A), называют корневым подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ, а каждый элемент f названного подпространства Nλ называют корневым вектором, т.е. для каждого собственного значения λ в корневом подпространстве Nλ можно выбрать базис из собственных и присоединенных элементов, который состоит из цепочки функций $f_0, f_1, \ldots, f_i$, таких, что справедливы равенства (1)

$$Af_0 = \lambda f_0,\ Af_1 = \lambda f_1 + f_0, \ldots,$$
$$Af_i = \lambda f_i + f_{i-1}.$$

Недостатки формул (1) были обнаружены на следующем, после полноты, этапе исследования несамосопряженных дифференциальных уравнений В. А. Ильиным [5].

После установления полноты системы собственных и присоединенных функций естественным образом возникает актуальный для приложений вопрос о возможности разложения по этой системе произвольной функции из некоторого класса. Может оказаться, что в случае, когда общее число присоединенных функций является бесконечным, полная и минимальная система всех собственных и присоединенных функций будет базисом при одном выборе присоединенных функций и перестает быть базисом при другом выборе присоединенных функций. Для преодоления этих трудностей В. А. Ильин [5] ввел понятие приведенной системы собственных и присоединенных функций, которая обладает свойством базисности всякий раз, когда это свойство имеется хотя бы при одном выборе присоединенных функций.

Недостатки формул (1) обнаруживаются также при рассмотрении соответствующих представлений операторов L, L^2, L^3, L^{-1} и т.д.

Вывод формул для построения цепочек присоединенных функций. Пусть дано уравнение вида

$$Ly \equiv L_0 y + (L_1 y)(\lambda - \lambda_0) + (L_2 y)(\lambda - \lambda_0)^2 + \\ + \Lambda + (L_S y)(\lambda - \lambda_0)^S = 0, \tag{2}$$

где λ – комплексный параметр; L_i – линейный оператор; λ_0 – комплексное число.

Решение уравнения (1) будем искать в виде следующего ряда:

$$y(x) = y_0(x) + \frac{y_1(x)}{\lambda_0}(\lambda - \lambda_0) + \frac{y_2(x)}{\lambda_0^2}(\lambda - \lambda_0)^2 + \Lambda \ . \tag{3}$$

Подставляя соотношение (2) в уравнение (1), формально получаем равенство

$$L_0 y_0 + \frac{1}{\lambda_0}(L_0 y_1)(\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{\lambda_0^2}(L_0 y_2)(\lambda - \lambda_0)^2 + \Lambda + \\ + (L_1 y_0)(\lambda - \lambda_0)^S + \frac{1}{\lambda_0}(L_1 y_1)(\lambda - \lambda_0)^2 + \\ + \frac{1}{\lambda_0^2}(L_1 y_2)(\lambda - \lambda_0)^3 + \Lambda + (L_2 y_0)(\lambda - \lambda_0)^2 + \\ + \frac{1}{\lambda_0}(L_2 y_1)(\lambda - \lambda_0)^3 + \frac{1}{\lambda_0^2}(L_2 y_2)(\lambda - \lambda_0)^4 + \Lambda + \Lambda + \\ + (L_S y_0)(\lambda - \lambda_0)^S + \frac{1}{\lambda_0}(L_S y_1)(\lambda - \lambda_0)^{S+1} + \\ \frac{1}{\lambda_0^2}(L_S y_2)(\lambda - \lambda_0)^{S+2} + \Lambda = 0 \ . \tag{4}$$

Теперь приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $(\lambda - \lambda_0)^k$, $k = 0,1,2,...$

$$(\lambda - \lambda_0)^0 : \quad L_0 y_0 = 0 \, ; \tag{5}$$

$$(\lambda - \lambda_0) : \quad \frac{1}{\lambda_0} L_0 y_1 + L_1 y_0 = 0 \, ; \tag{6}$$

$$(\lambda - \lambda_0)^2 : \quad \frac{1}{\lambda_0^2} L_0 y_2 + \frac{1}{\lambda_0} L_1 y_1 + L_2 y_0 = 0 \, ; \tag{7}$$

\- -

$$(\lambda - \lambda_0)^S : \quad \frac{1}{\lambda_0^S} L_0 y_S + \frac{1}{\lambda_0^{S-1}} L_1 y_{S-1} + \Lambda + \\ + \frac{1}{\lambda_0} L_{S-1} y_1 + L_S y_0 = 0 \, . \tag{8}$$

При $\lambda = \lambda_0$ из уравнений (1), (3) и (4) вытекает равенство

$$Ly_0 = 0 \, , \tag{9}$$

а из уравнений (1), (3) и (5) имеем

$$Ly_1 + \lambda_0 \frac{1}{1!} \frac{\partial (Ly_0)}{\partial \lambda} = 0 \, . \tag{10}$$

Если же рассмотреть уравнения (1), (3) и (8) при $\lambda = \lambda_0$, то можно прийти к следующему соотношению:

$$Ly_2 + \lambda_0 \frac{1}{1!} \frac{\partial (Ly_1)}{\partial \lambda} + \lambda_0^2 \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 (Ly_0)}{\partial \lambda^2} = 0 \, . \tag{11}$$

Аналогичным образом из уравнений (1), (3) и (7) при $\lambda = \lambda_0$ можно получить дифференциальное уравнение

$$Ly_S + \lambda_0 \frac{1}{1!} \frac{\partial (Ly_{S-1})}{\partial \lambda} + \lambda_0^2 \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 (Ly_{S-2})}{\partial \lambda^2} + \Lambda + \\ + \lambda_0^S \frac{1}{S!} \frac{\partial^S (Ly_0)}{(\partial \lambda_0)^S} = 0 \, . \tag{12}$$

Функция $y_0(x)$ называется собственной функцией, соответствующей собственному значению λ_0, а система функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_S(x)$ – цепочкой присоединенных функций, соответствующих собственной функции $y_0(x)$ и собственному значению λ_0, если они удовлетворяют уравнениям (9)–(12).

В случае, когда оператор L в уравнении (2) имеет вид

$$Ly = Ay - \lambda y \, ,$$

где A – некоторый линейный оператор, из уравнений (9)–(12) получим следующую цепочку равенств для определения собственных и присоединенных элементов оператора A:

$$Ay_0 - \lambda_0 y_0 = 0,$$
$$Ay_1 - \lambda_0 y_1 = \lambda_0 y_0,$$
$$Ay_2 - \lambda_0 y_2 = \lambda_0 y_1,$$
$$-----------$$
$$Ay_S - \lambda_0 y_S = \lambda_0 y_{S-1}$$

или

$$Ay_0 = \lambda_0 y_0,\ Ay_1 = \lambda_0 (y_1 + y_0),$$
$$Ay_2 = \lambda_0 (y_2 + y_1),\ \ldots,\ Ay_S = \lambda_0 (y_S + y_{S-1}). \quad (13)$$

При таком способе определения присоединенных функций значительно улучшаются так называемые антиаприорные оценки, введенные В. А. Ильиным [6], которые играют принципиальную роль при установлении сходимости спектральных разложений, связанных с несамосопряженными дифференциальными уравнениями. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть u_{k0} – собственные функции, а u_{k1} – присоединенные функции, построенные по формулам (13) дифференциального оператора L с вполне непрерывным обратным оператором L^{-1}, и пусть система $\{u_{k0}, u_{k1}\}$ образует безусловный базис пространства L_2. Тогда для безусловной базисности в L_2 системы $\{u_{k0}, u_{k1} + c_k u_{k0}\}$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\| u_{k0} \|_{L_2} \le \| u_{k1} \|_{L_2} \quad (14)$$

для всех номеров k.

Неравенства (14) принято называть антиаприорными оценками.

Замечание 1. В случае регулярного оператора Шредингера

$$Lu = -u'' + q(x)u,\ x \in G, \quad |G| < \infty, \quad (15)$$

порожденного какими-нибудь краевыми условиями, конкретный вид которых не имеет особого значения, для присоединенных функций, определенных по формулам (1), антиаприорные оценки имеют следующий вид [7, 8]:

$$\| u_{k,j-1} \|_{L_2(G)} \le c_0 |\sqrt{\lambda}| \cdot \| u_{k,j} \|_{L_2(G)}, \quad (16)$$

при условии $|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}| \le const$ и $q(x) \in L_1(G)$, если же присоединенные функции определять по формулам (13), то при тех же условиях антиаприорные оценки (16) примут вид

$$\| u_{k,j-1} \|_{L_2(G)} \le c_1 \cdot \| u_{k,j} \|_{L_2(G)}.$$

Таким образом, для регулярного оператора Шредингера оценки (14) всегда выполнены, если только $|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}| \le const$ и $q(x) \in L_1(G)$, и в силу приведенной теоремы система собственных и присоединенных функций образует безусловный базис при любом выборе коэффициентов c_k, если она является базисом хотя бы при одном выборе c_k.

Именно инвариантность свойств базисности при произвольном выборе системы собственных и присоединенных функций и является основным преимуществом при использовании нового определения присоединенных функций.

Следует отметить, что на улучшение свойств базисности собственных и присоединенных функций при использовании определения вида $Lu_{kj} = \lambda_k u_{kj} + \sqrt{\lambda_k} u_{kj-1}$ указывается в работах В. А. Ильина [10], Н. И. Ионкина [11].

Замечание 2. Оценки (14) имеют место для диссипативных операторов [13, с. 418], если присоединенные функции определены по формулам (13).

Из сделанных замечаний и приведенной теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Если система собственных и присоединенных функций $\{u_{k0}, u_{k1}\}$ оператора Шредингера (15) определена по формулам (13) и образует безусловный базис пространства $L_2(G)$, то любая другая система собственных и присоединенных функций вида $\{u_{k0}, u_{k1} + c_k u_{k0}\}$ того же оператора также образует безусловный базис в $L_2(G)$.

Следствие 2. Если система собственных и присоединенных функций диссипативного оператора определена по формулам (13) и образует безусловный базис при каком-нибудь одном выборе присоединенных функций, то это свойство базисности сохраняется при любом другом выборе присоединенных функций.

Важно отметить, что использование нового определения не улучшает спектральной сущности задачи, а лишь дает удобную для использования формулу определения присоединенной функции. Так, если система собственных и присоединенных функций по определению (13) образует базис, хотя бы при одном выборе коэффициентов c_k, то собственные и присоединенные функции по новому определению (13) образуют базис при каждом выборе c_k. Наоборот, если собственные и присоединенные функции по определению (1) не образуют базиса ни при каком выборе собственных и присоединенных функций и таким образом собственные и присоединенные функции, построенные по новому определению (13), также не обладают свойствами базисности.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность акад. НАН РК М. О. Отелбаеву, акад. НАН РК Т. Ш. Кальменову, проф. Б. Е. Кангужину за ценные советы, обсуждение результатов и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. 1951. Т. 77, №1. С. 11-14.

2. *Келдыш М.В.* О полноте собственных и присоединенных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи математических наук. 1971. Т. 26, вып. 4. С. 15-41.

3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.

4. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966. 544 с.

5. *Ильин В.А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 148-155.

6. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I, II // Дифференциальные уравнения. 1980. №5. С. 777-794; №6. С. 981-1009.

7. *Тихомиров В.В.* Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметрам // ДАН СССР. 1983. Т. 273, №4. С. 807-810.

8. *Ломов И.С.* Некоторые свойства собственных и присоединенных функций оператора Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, №10. С. 1684-1694.

9. *Гохберг И.Ц., Крейн Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965. 448 с.

10. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059-2071.

11. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. М., 1977. Т. 13, №2. С. 294-304.

Резюме

Өз-өзіне түйіндес емес теңдеулердің меншікті функцияларына қосымша алынған функциялар тізбекшесін құруға арналған жаңа формулалар ұсынылып отыр және мұндай формулалардың қажеттілігі негізделген.

Summary

This article offers and maintaines New formulas for building Lines of the united functions non-self-conjugacy of equations.

УДК 517.927.25

ЮКГУ им. М. Ауезова,
г. Шымкент

Поступила 4.02.07г.