М. О. САТКАЛИЕВА

ЗАДАЧА КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО МЕХАНИЗМА IV КЛАССА В ВИДЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При исследовании и проектировании пространственных шарнирно-рычажных механизмов высоких классов широко используются многочлены. Рассмотрим задачу синтеза пространственного механизма IV класса общего вида в соответствии с рисунком по четырем заданным положениям входного звена 1 и выходной точки T звена 3:

$$\varphi_{1i} = \varphi_1(t_i) \quad \text{и} \tag{1}$$

$$X_{Ti} = X_T(t_i),\ Y_{Ti} = Y_T(t_i),\ Z_{Ti} = Z_T(t_i),\quad i = \overline{1,4}.$$

Для решения задачи синтеза кинематической цепи $ABCD$ механизма по заданным положениям выходной точки звена 3 (BC), в котором приближающая окружность точки C радиусом $l_{CD} = l_{4\phi}$ с центром в точке D звена 4 (CD) определяется как линия пересечения сферы с координатами X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1} и плоскости, удобно использовать выражения взвешенных разностей [1]:

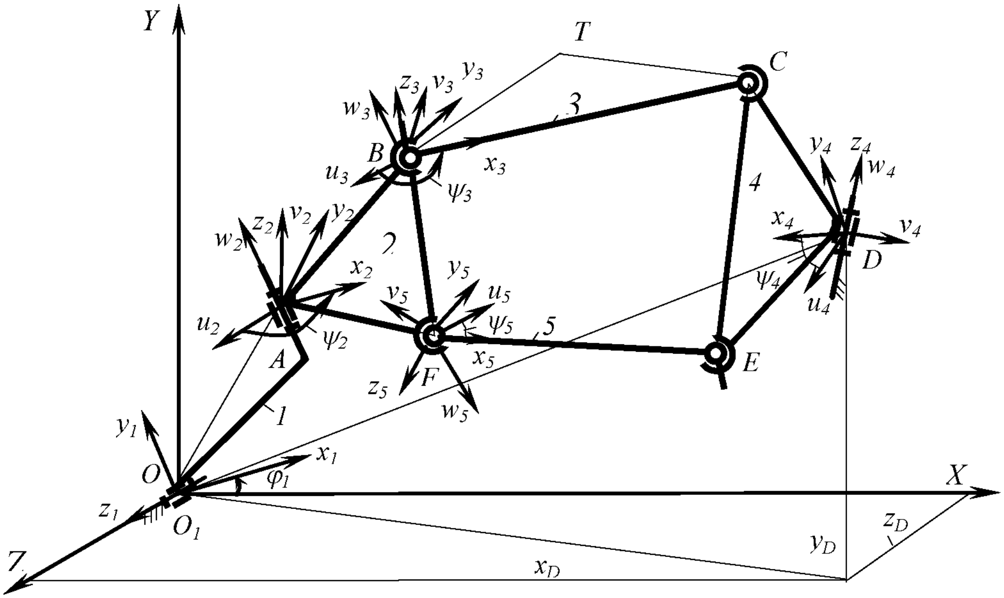
$$\Delta q = l_4^2 - l_{4\phi}^2, \tag{2}$$

$$\Delta q_i = ax_{3Ci} + by_{3Ci} + cz_{3Ci} - 1 = 0, \tag{3}$$

где $l_{4\phi}$ – расстояние между точками C звена 3 и D_1;

$$l_{4\phi}^2 = (X_{D1} - X_{Ci})^2 + (Y_{D1} - Y_{Ci})^2 + (Z_{D1} - Z_{Ci})^2; \tag{4}$$

a, b, c – коэффициенты уравнения приближающей



плоскости; X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci} – соответствующие координаты точек D_1 (центра сферы) и C в абсолютной системе координат $OXYZ$ [2]. По условию синтеза координаты точки C звена 3, которому принадлежат локальные координаты выходной точки T, в абсолютной системе координат $OXYZ$ определяются с использованием обобщенного метода символических обозначений преобразования координат в виде:

$$\begin{aligned} X_C &= x_{3C}\cos(\varphi_1+(\psi_2+\psi_3))+ \\ &+ z_{3C}\sin(\varphi_1+(\psi_2+\psi_3))+X'_C, \\ Y_C &= x_{3C}\sin(\varphi_1+(\psi_2+\psi_3))- \\ &- z_{3C}\cos(\varphi_1+(\psi_2+\psi_3))+Y'_C, \\ Z_C &= y_{3C}\cos\beta_3+Z'_C,. \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$X'_C = a_{2,1}\cos\varphi_1 + a_{3,2}\cos(\varphi_1+\psi_2),$$

$$Y'_C = a_{2,1}\sin\varphi_1 + a_{3,2}\sin(\varphi_1+\psi_2),$$

$$Z'_C = c_{21} + b_{21} + b_{32}\cos\alpha_{21}.$$

Для решения задачи синтеза представим выражения (2), (3) в виде системы алгебраических уравнений (САУ):

$$\begin{cases} l_1x_1 + l_2x_2 + l_4x_4 + l_5x_5 = a, \\ l_1x_6 + l_2x_7 + l_4x_9 + l_5x_{10} = b, \\ l_1x_1 + l'_2(x_2c_2 - x_7c_7) + l_3x_3 + l'_5(x_5c_5 + x_{10}c_{10}) = a, \\ l_1x_6 + l'_2(x_7c_2 - x_2c_7) + l_3x_8 + l'_5(x_{10}c_5 + x_5c_{10}) = b, \\ x_1^2 + x_6^2 = 1, \\ x_2^2 + x_7^2 = 1, \\ x_3^2 + x_8^2 = 1, \\ x_4^2 + x_9^2 = 1, \\ x_5^2 + x_{10}^2 = 1. \end{cases} \tag{6}$$

В качестве свободной неизвестной выступает x_1, а все остальные неизвестные x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} – в качестве главных неизвестных. Определение главных неизвестных по свободной неизвестной соответствует задаче кинематического синтеза механизма IV класса при заданных условиях синтеза (1). Отметим, что синтез геометрических параметров пространственного направляющего рычажного механизма IV класса определяется через решения:

$$\begin{cases} x_{11}x_1 + x_{12}x_2 + x_{14}x_4 + x_{15}x_5 = a, \\ x_{11}x_6 + x_{12}x_7 + x_{14}x_9 + x_{15}x_{10} = b, \\ x_{11}x_1 + x_{16}\left(x_2x_{18} - x_7x_{19}\right) + x_{13}x_3 + \\ \qquad + x_{17}\left(x_5x_{20} + x_{10}x_{21}\right) = a, \\ x_{11}x_6 + x_{16}\left(x_7x_{18} - x_2x_{19}\right) + x_{13}x_8 + \\ \qquad x_{17}\left(x_{10}x_{20} - x_5x_{21}\right) = b, \\ x_1^2 + x_6^2 = 1, \\ x_2^2 + x_7^2 = 1, \\ x_3^2 + x_8^2 = 1, \\ x_4^2 + x_9^2 = 1, \\ x_5^2 + x_{10}^2 = 1, \\ x_{18}^2 + x_{19}^2 = 1, \\ x_{20}^2 + x_{21}^2 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Система алгебраических уравнений (7) получена из САУ (6), если положить в качестве неизвестных x_1, x_2, x_3, ..., x_{21} геометрические параметры механизма IV класса. К системе (7) следует добавить еще одно условие с учетом условия синтеза параметров механизма

$$P_n\left(x_1x_2,\ldots,x_{21}\right) = 0. \tag{8}$$

Отметим, что $P_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ обычно является многочленом. Таким образом, система (7), (8) представляет собой также САУ.

Основная задача: следует выяснить, совместна ли система (6) или САУ (7), (8) в случае проектирования пространственного механизма IV класса.

Отметим, что подобные задачи о совместимости САУ возникают также при синтезе пространственных шарнирно-рычажных механизмов высоких классов [2]. Таким образом, в теории механизмов высоких классов актуальной является проблема выяснения совместности САУ, в которой заданы свободные и главные неизвестные. Рассмотрим, совместна ли следующая САУ:

$$\begin{cases} P_1\left(x_1,\ldots,x_n\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m\left(x_1,\ldots,x_n\right) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $P_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, $i = \overline{1,m}$ – многочлены от n переменных.

С системой (9) свяжем идеал I, порождаемый многочленами, отвечающими уравнениям системы

$$I = \left(P_1(x_1,\ldots,x_n), P_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,P_m(x_1,\ldots,x_n)\right).$$

Из теоремы Гильберта о нулях [3] следует, что для системы (9) многочлен $F(x_1,\ldots,x_n)$ обращается в нуль на решениях данной системы тогда и только тогда, когда найдутся многочлены $r_1(x_1,\ldots x_n),\ldots,r_m(x_1,\ldots,x_n)$ и натуральное S, для которого $F^S = r_1P_1 + r_2P_2 + \ldots + r_mP_m$, т.е. добавление уравнений вида $F = 0$, полученных указанным способом, не изменяет множества решений данной САУ. Второй факт [3], который нам необходим для дальнейших целей: система (9) несовместна тогда и только тогда, когда **1** принадлежит идеалу I, порожденному системой (9) и всеми уравнениями вида $F = 0$, где $F^S = r_1P_1 + r_2P_2 + \ldots + r_mP_m$.

Таким образом, нужно выяснить: можно ли **1** представить в виде $1 = r_1P_1 + r_2P_2 + \ldots + r_mP_m$?

Это лучше всего сделать с помощью базиса Гребнера [3]. В каждом идеале существует базис Гребнера и его можно построить согласно алгоритму Бухбергера:

1 шаг. Рассмотрим старшие члены многочленов $P_1, P_2, .., P_m$ из САУ (9). Обозначим их через $P_{1c}, P_{2c},\ldots,P_{mc}$.

2 шаг. Найдем два многочлена P_i и P_j, которые имеют зацепления, т.е. у которых старшие члены имеют общие делители $P_{ic} = wq_1$ и $P_{jc} = wq_2$, где w – их общий делитель в виде одночлена.

3 шаг. Составим новый многочлен $S(P_i, P_j) = P_iq_2 - P_2q_1$.

4 шаг. Редуцируем многочлен $S(P_i, P_j)$ с помощью имеющегося базиса $P_1, P_2,\ldots,P_m$. Если результат редуцирования не является нулем, то его добавляем к имеющемуся базису, т. е. к системе (9) добавляем еще одно уравнение.

5 шаг. Продолжаем процесс с 1-го шага до тех пор, пока не исчерпаем все зацепления расширенной системы (9). Таким образом, за конечное число шагов строится базис Гребнера. Затем его нужно минимизировать и редуцировать. Известно [3, 4], что минимальный редуцированный базис Гребнера идеала определен однозначно. Если построенный минимальный редуцированный базис Гребнера идеала содержит ненулевую константу, то система (9) несовместна. Также по построенному базису Гребнера можно вычислить количество решений САУ (9). В качестве примера рассмотрим применение базисов Гребнера для синтеза параметров пространственного направляющего механизма IV класса.

В работе [2] решение задачи интерполяционного кинематического синтеза параметров пространственного рычажного механизма IV класса общего вида по четырем заданным входного 1 и выходного 4 звеньев получено в виде САУ

$$a_ix_1 + b_ix_2 + c_ix_3 + d_ix_4 + e_ix_1x_3 + \\ + f_ix_2x_3 - g_i = 0, \quad i = 1,2,3,4, \qquad (10)$$

где $a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i,\ e_i, f_i,\ g_i$ – некоторые числовые характеристики; x_1, x_2, x_3, x_4 – неизвестные геометрические параметры механизма.

Выберем упорядочение $x_4 > x_3 > x_2 > x_1$. Занумеруем уравнения (10) через P_1, P_2, P_3, P_4. Зацепление P_1 и P_2 имеет вид

$$P_1d_2 - P_2d_1 \quad (a_1d_2 - a_2d_1)x_1 + (b_1d_2 - b_2d_1)x_2 + \\ + (c_1d_2 - c_2d_1)x_3 + (e_1d_2 - e_2d_1)x_1x_3 + \\ + (f_1d_2 - f_2d_1)x_2x_3 + (g_1d_2 - g_2d_1) = P_5. \quad (11)$$

Аналогично запишем зацепление (P_1 и P_3), (P_1 и P_4):

$$P_1d_3 - P_3d_1 = P_6, \qquad P_1d_4 - P_4d_1 = P_7. \quad (12)$$

Далее устраняем зацепление (P_5 и P_6), (P_5 и P_7). В результате имеем P_8 и P_9, в котором отсутствует неизвестные x_4, x_5. После этого из зацепления P_8 и P_9 исключается x_2. В результате кубический многочлен P_{10} зависит только от x_1. Все указанные зацепления устранены. Таким образом, система (10) имеет конечное число решений, так как справедлива теорема [3]: число решений системы алгебраических уравнений конечно тогда и только тогда, когда базис Гребнера идеала I содержит элементы P_1, ..., P_{10}, старшие члены которых являются степенями переменных x_1, ..., x_n соответственно. В данном случае старшие члены базиса Гребнера имеют $d_1x_4,\ ax_3^2,\ bx_2^3,\ cx_1^4$, поэтому выполняются условия теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. М.: ГИФЛ, 1959. 1084 с.
2. *Канлыбаев О.* Интерполяционный синтез пространственного рычажного механизма IV класса по четырем положениям // Вестник НАН РК. Алматы, 2003. Вып. 2. С. 28-36.
3. *Аржанцев И.В.* Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений. МЦНМО, 2003. 68 с.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 544 с.

Резюме

IV класты кеңістікті бағыттаушы механизмнің кинематикалық синтез есебіне көп мүшелі алгебралық теңдеулерді пайдалану арқылы, Гребнер базисын қолданылуы көрсетілген.

Summary

The application of the Grebner's basis in solving tasks of kinematic synthesis of a spatial guide mechanism of IV class using multinomials in the form of a system of algebraic equations is proposed.

Институт механики и машиноведения
им. У. А. Джолдасбекова *Поступила 20.01.07г.*