

МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА НА ГОРОДСКИХ МАГИСТРАЛЯХ

Автотранспортный поток в условиях современного мегаполиса характеризуется весьма сложной структурой. Поэтому используемая во многих случаях модель потока без учета влияния светофоров не может адекватно описать формирование плотности автотранспорта на городских улицах, а также дать правильные оценки загрязнения атмосферы выхлопными газами, так как степень загрязнения и объем выхлопов зависят от режима работы двигателей.

В настоящей работе излагается современный подход к моделированию интенсивности авто-

транспортных потоков. Анализируются возможности и перспективы применения эвристических методов и концепций моделирования перегруженных потоков автомобилей на городских автотрассах [1, 2].

Предлагается модель автотранспортного потока, основанная на аналогии седиментационным процессом (рис. 1).

Пусть $V(\rho)$ – скорость транспорта, зависящая от его плотности.

Выделим три характерные плотности (рис. 2), а именно: оптимальную ρ_{opt} , при которой реализу-

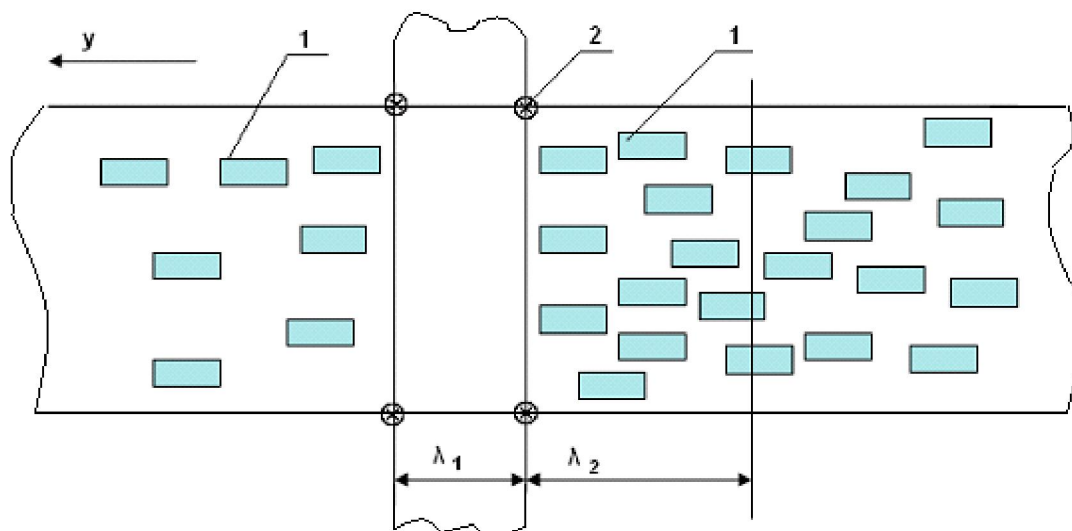


Рис. 1. Модель автотранспортного потока на регулируемом перекрестке: 1 – автомобили; 2 – светофора

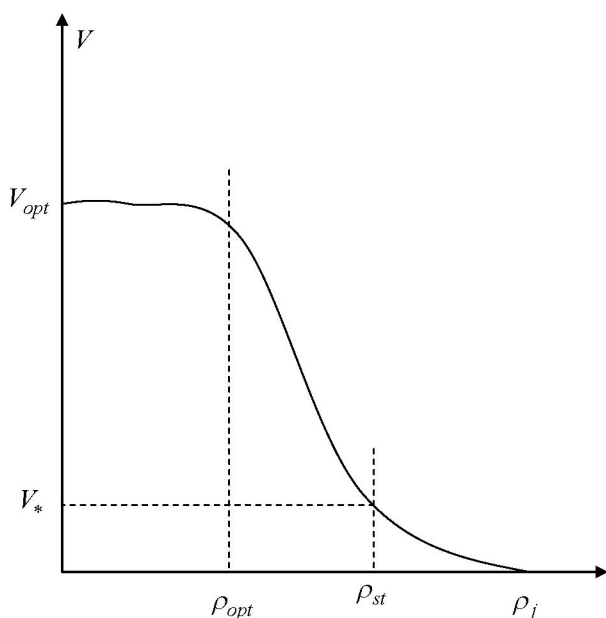


Рис. 2. Функциональная зависимость скорости движения автомобиля от плотности транспортного потока ρ

ется максимально допустимая в городских условиях скорость движения; плотность автомобилей в зоне перед светофором при красном свете ρ_{st} и плотность в пробке ρ_j при которой движение прекращается [3, 4].

Так как вследствие влияния светофоров плотность потока зависит от координаты и времени, из условия баланса числа автомобилей получаем соотношение:

$$V \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial y}, \quad (2)$$

где J – транспортный поток.

Зависимость скорости потока от плотности можно моделировать с помощью логистического уравнения:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -kV(V - V_*). \quad (3)$$

Решая это уравнение, получим:

$$V = \frac{CV_* \exp(-kV_*\rho)}{1 - C \exp(-kV_*\rho)}. \quad (4)$$

В соотношении (4) значение характерной скорости V_* берется при плотности потока ρ_{st} , а константа C находится из условия

$$V(\rho_{opt}) = V_{opt}. \quad (5)$$

Приближенно можно положить

$$C \approx \frac{V_{opt}}{V_{opt} + V_*}. \quad (6)$$

В результате получаем зависимость скорости потока от локальной плотности в виде:

$$V = \frac{V_{opt}V_* \exp(-kV_*\rho)}{V_{opt}(1 - \exp(-kV_*\rho)) + V_*}. \quad (7)$$

Рассматривая совместно уравнения (1), (2), (7), можно описать изменение плотности автотранспортного потока и его интенсивности во времени с учетом влияния светофоров, а также найти характерные зоны повышенной и пониженной плотности потока до и после светофора [5, 6].

Подставляя (7) в соотношение (1), получаем:

$$V \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{dV}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (8)$$

Отсюда следует:

$$(V(\rho) + \rho V') \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad (9)$$

$$V'(\rho) = - \frac{kV_{opt} V_*^2 (V_{opt} + V_*) \exp(-kV_* \rho)}{[(V_{opt} + V_*) - V_{opt} \exp(-kV_* \rho)]^2}. \quad (10)$$

Полный интеграл уравнения (9) можно найти с помощью метода Лагранжа-Шарпи [7, 8]. Схема применения этого метода в нашем случае такова. Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{P} = -dt = \frac{d\rho}{P\rho - q} = -\frac{d\rho}{R\rho} = -\frac{dq}{Rq}, \quad (11)$$

где

$$P = V(\rho) + \rho V'(\rho); \quad (12)$$

$$R = (2V'(\rho) + \rho V''(\rho))\rho; \quad (13)$$

$$p = \frac{\partial \rho}{\partial y}; \quad q = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (14)$$

Далее ищем первый интеграл системы (11):

$$\Phi(\rho, p, q) = A = const. \quad (15)$$

Записываем совместную систему уравнений (9) и (15):

$$\begin{cases} (V(\rho) + \rho V'(\rho))p - q = 0, \\ \Phi(\rho, p, q) = 0 \end{cases}. \quad (16)$$

Разрешая теперь эту систему относительно частных производных p, q , переходим к «расцепленной» системе:

$$\begin{cases} p = F_1(\rho, A), \\ q = F_2(\rho, A) \end{cases} \quad (17)$$

Интегрируя эту систему, получим полный интеграл модели распространения плотностной волны в автотранспортном потоке.

Из системы (11) следует:

$$\frac{d\rho}{dq} = \frac{p}{q}. \quad (18)$$

Поэтому для решения рассматриваемой модели выполняется соотношение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad (19)$$

где c – фазовая скорость плотностной волны.

Таким образом, модель имеет решение в виде уединенной плотностной волны вида

$$\rho = \rho(\xi), \quad (20)$$

где $\xi = y - ct$ – автомодельная волновая переменная.

Вывод о существовании плотностных волн на городских автомагистралях полностью согласуется с известными представлениями и эмпирическими данными [9, 10].

Из соотношений (9), (10), (11) получаем уравнение для расчета фазовой скорости автотранспортного потока на фронте плотностной волны:

$$-c = V(\rho) + \rho V'(\rho). \quad (21)$$

Отсюда следует

$$c = -V \left[1 - \rho k V \frac{V_{opt} + V_*}{V_{opt} \exp(-kV_* \rho)} \right]. \quad (22)$$

Задавшись определенной фиксированной фазовой скоростью, получаем из (22) выражение для скорости движения машин в зависимости от плотности автотранспортного потока на фронте плотностной волны

$$V = \frac{1 + \sqrt{1 + 4ckA}}{2\rho kA}, \quad (23)$$

где

$$A = \frac{V_{opt} + V_*}{V_{opt} \exp(-kV_* \rho)}. \quad (24)$$

Дальнейшая работа по развитию седиментационной модели будет направлена на учет заданного режима работы светофоров и моделирования потоков на перекрестках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A. Statistical Physics of vehicle traffics and some related systems // Phys. Rep. V. 329. 199 (2000).
2. Helbing D. Traffic and related self-driven many-particle systems // Rev. Mod. Phys. V. 73. 1067 (2001).
3. Kerner B.S. Physics of Traffic (Springer, Berlin, 2004).
4. Lubashevsky I., Mahnke R., Wagner P., Kalenkov S. Long-lived states in synchronized traffic flow: Empirical prompt and dynamical trap model // Phys. Rev. E. V. 66. 016117 (2002).
5. Lubashevsky I., Hajimahmoodzadeh M., Katsnelson A., Wagner P. Noised-induced phase transition in an oscillatory system with dynamical traps // Eur. Phys. J. B. V. 36. 115 (2003).
6. Kuhne R., Mahnke R., Lubashevsky I., Kaupus J. Probabilistic description of traffic breakdowns // Phys. Rev. E. V. 65. 066125 (2002).
7. Мамвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. Минск, 1968. 268 с.

8. *Lubashevsky I., Wagner P., Mahnke R.* Rational-driver approximation in car-following theory // *Phys. Rev. E.* V. 68. 056109 (2003).

9. *Lubashevsky I., Wagner P., Mahnke R.* Bounded rational driver models // *Eur. Phys. J. B.* V. 32. 243-247 (2003).

10. *Wagner P., Lubashevsky I.* Empirical basis for car-following theory development // e-print Arxiv:cond-mat/0311192.

Резюме

Қалалық жолдарда автокөліктер ағынының математикалық үлгісі берілді. Үлгі седиментациялық заңдылыққа негізделген. Автокөліктер ағынының фазалық жылдамдығы анықталды.

УДК 504.3.054.:656

Шымкентский институт

Международного казахско-турецкого

университета им. Х. А. Ясави

Поступила 2.06.07г.