А. М. САРСЕНБИ

БАЗИСНОСТЬ РИССА РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell u = p_0(x)u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u \qquad (1)$$

и некоторыми краевыми или нелокальными условиями на произвольном конечном интервале $G = (a,b)$. Для наших рассуждений конкретный вид краевых условий не играет особой роли. Поэтому выражение (1) мы будем называть формально несамосопряженным дифференциальным оператором, коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям С:

– для некоторой внутренней точки $x_0 \in G$ вещественнозначный коэффициент $p_0(x) \geq \alpha > 0$ абсолютно непрерывен вместе со своей первой производной на замкнутых интервалах $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$;

– для той же точки $x_0 \in G$ комплекснозначный коэффициент $p_1(x)$ абсолютно непрерывен на каждом отрезке $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$;

– комплекснозначный коэффициент $p_2(x) \in$ $\in L_1(a,b)$.

Поскольку нас не интересует явный вид краевых условий, то собственные и присоединенные функции оператора L мы будем понимать в обобщенном смысле В. А. Ильина [1], а именно, системой обобщенных корневых функций (ОКФ) оператора L назовем произвольную систему комплекснозначных функций $\{u_k(x)\}$, каждая из которых абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной на замкнутых интервалах $[c, x_0]$ и $[x_0, d]$ $(a < c < x_0 < d < b)$, для некоторого λ_k почти всюду в (a, x_0) и (x_0, b) удовлетворяет уравнению

$$Lu_k + \lambda_k u_k = \theta_k u_{k-1} \qquad (2)$$

и в точке разрыва x_0 удовлетворяет условиям сопряжения

$$u_k(x_0 - 0) = u_k(x_0 + 0), \qquad (3)$$

$$p_0(x_0 - 0) \cdot u_k'(x_0 - 0) =$$
$$= p_0(x_0 + 0) \cdot u_k'(x_0 + 0) + \beta u_k(x_0 + 0), \qquad (4)$$

где β – некоторая постоянная, $\theta_k = 0$, либо $\theta_k = 1$ (в этом случае $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), $\theta_1 = 0$.

При $\theta_k = 0$ функцию $u_k(x)$ называем обобщенной собственной функцией, а при $\theta_k = 1$ – обобщенной присоединенной функцией.

Оператор, формально сопряженный к оператору L, обозначим следующим образом

$$L^*\upsilon = (p_0\upsilon)'' - (\overline{p}_1\upsilon)' + \overline{p}_2\upsilon .$$

Предположим, что система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к ОКФ $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ оператора L^*.

Будем считать, что система ОКФ $\{u_k(x)\}$ пронумерованы так, что вслед за каждой обобщенной собственной функцией стоят все входящие вместе с ней в одну цепочку обобщенные присоединенные функции. Тогда ОКФ $\upsilon_k(x)$ сопряженного оператора определяются как абсолютно непрерывные функции вместе со своей первой производной в интервалах $[c, x_0]$ и $[x_0, d]$, ($a < c < x_0 < d < b$), удовлетворяющие условиям, аналогичным условиям (3) и (4), возможно с другой константой β, и удовлетворяющие почти всюду в (a, x_0) и (x_0, b) уравнениям

$$L^*\upsilon_k + \overline{\lambda}_k\upsilon_k = \theta_{k+1}\upsilon_{k+1},$$

где числа λ_k и θ_k те же, что и в уравнении (2).

В работе [2] В. Д. Будаевым установлен следующий результат.

Теорема (В. Д. Будаев). Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система ОКФ оператора L, коэффициенты которого удовлетворяют условиям C. Пусть выполняются следующие два условия:

– система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ сопряженного оператора L^*;

– последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения и существует константа M_1 такая, что для любого номера k = 1,2,3,...

$$|\mathrm{Im}\,\mu_k| \le M_1, \tag{5}$$

где $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ – тот корень из комплексного числа λ_k, для которого $\mathrm{Re}\,\mu_k \ge 0$.

Тогда для безусловной базисности в $L_2(G)$ каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств для всех номеров k

$$\sum_{t \le |\mu_k| \le t+1} 1 \le M_2, \tag{6}$$

$$\| u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \| \upsilon_k(x)\|_{L_2(G)} \le M_3. \tag{7}$$

Условие (7) обычно называют условием базисности В. А. Ильина. Необходимость условия (7) для произвольных базисов, вообще говоря, не связанных с дифференциальным оператором, известна давно [3. С. 372].

Пусть y – произвольная точка интервала $[x_0, b)$. Введем новую переменную

$$t(x) = \int_y^x p_0^{-1/2}(s)ds$$

и на интервале $[t(x_0), t(b)]$ рассмотрим функции $\omega_k(t)$, определенные равенством

$$u_k(x) = \gamma_1(x)\cdot\omega_k(t),\ k = 1,2,3,...,$$

где

$$\gamma_1(x) = \left(\frac{p_0(x)}{p_0(y)}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_y^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds\right).$$

Легко проверить, что

$$Lu_k = \gamma_1(x)\cdot[\omega_k''(t) + q_1(t)\omega_k(t)]$$

и, следовательно, функции $\omega_k(t)$ являются ОКФ оператора

$$L_1\omega = \omega'' + q_1\omega,$$

заданного на интервале $(t(x_0), t(b))$ с потенциалом $q_1(t) \in L_1$.

Таким образом, для функций $\omega_k(t)$ на интервале $(t(x_0), t(b))$ справедливы оценки, полученные В.В. Тихомировым в работе [4].

Аналогично можно убедиться в справедливости результатов работы [4] в интервале $(t(a), t(x_0))$.

Так как $u_k(x) = \gamma_1(x)\cdot\omega_k(t)$, то пользуясь видом функции $\gamma_1(x)$ и условиями сопряжения (3), убеждаемся в справедливости результатов работы [4] для функции $u_k(x)$ на интервалах (x_0, b) и (a, x_0).

Итак, мы убедились, что для ОКФ оператора L вида (1) справедливы следующие оценки [4], которые при выполнении условия (5) имеют вид

$$c_1\| u_k(x)\|_{L_q(G)} \le \| u_k(x)\|_{L_s(G)} \le c_2\| u_k(x)\|_{L_q(G)}, \tag{8}$$

где $1 \le q \le s \le +\infty$.

Оценки (8) играют важную роль при доказательстве результатов настоящей статьи.

Теорема. Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система ОКФ оператора L, коэффициенты которого удовлетворяют условиям С. Пусть также выполняются следующие два условия:

– система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ сопряженного оператора L^*;

– последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения и существует константа M_1 такая, что для любого номера $k = 1,2,3,...$

$$|\mathrm{Im}\,\mu_k| \le M_4,$$

где $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ – тот корень из комплексного числа λ_k, для которого $\mathrm{Re}\,\mu_k \ge 0$.

Тогда для базисности Рисса каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ необходимо и достаточно выполнение нижеследующих неравенств для всех номеров k:

$$\sum_{t\le|\mu_k|\le t+1} 1 \le M_5\,,\ \forall\, t \ge 0\,, \qquad (9)$$

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le M_6, \qquad \|v_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le M_7, \quad (10)$$

для всех номеров k.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы и каждая из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ является базисом Рисса. Тогда элементы этих систем почти нормированы в $L_2(G)$, т.е. существуют такие положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, что имеют место оценки

$$\alpha_1 \le \|u_k(x)\|_{L_2(G)} \le \beta_1, \quad \alpha_2 \le \|v_k(x)\|_{L_2(G)} \le \beta_2.$$

В неравенствах (8) положим $q = 2,\ s = \infty$. Тогда из первой половины этих неравенств будем иметь

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le C_2\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \le C_2\beta_1.$$

Полагая $M_3 = C_2\beta_1$, получаем первое неравенство (10).

Система $\{\upsilon_k(x)\}$ состоит из собственных и присоединенных функций сопряженного оператора L^*, поэтому для функций $\upsilon_k(x)$ также справедливы оценки (8). Так что, вывод второй оценки (10) совершенно аналогичен выводу первого неравенства. Необходимость условия (9) следует из теоремы В. Д. Будаева.

Докажем достаточность условий (10) и (9). Из левой половины неравенств (8) при $q = 2,\ s = \infty$, имеем

$$C_1\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \le \|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le M_3.$$

Аналогичная оценка справедлива для элементов системы $\{\upsilon_k(x)\}$. L_2 - нормы элементов обеих систем ограничены сверху. Следовательно,

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \|v_k(x)\|_{L_2(G)} \le const\,.$$

Выполнены все условия теоремы В.Д. Будаева. Это означает, что системы $\{u_k(x)\}$, $\{\upsilon_k(x)\}$ образуют безусловный базис пространства $L_2(G)$.

С другой стороны, имеющиеся факты обеспечивают почти нормированность в $L_2(G)$ элементов каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$. Это следует из биортонормированности этих систем и неравенства Коши – Буняковского

$$1 = |(u_k(x), v_k(x))| \le \|u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \|v_k(x)\|_{L_2(G)}.$$

Из последнего соотношения, ввиду (7), легко выводится ограниченность снизу L_2-норм элементов рассматриваемых систем.

Таким образом, мы имеем безусловные и почти нормированные в $L_2(G)$ базисы, которые, по теореме Лорча [3], являются базисами Рисса. Теорема доказана.

Аналогичные результаты были установлены нами в работе [5] для случая операторов второго порядка другого вида.

Автор выражает искреннюю признательность всем участникам научного семинара под руководством д-ра физ.-мат. наук М. А. Садыбекова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048-1053.

2. *Будаев В.Д.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 6. С. 941-952.

3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., Наука, 1965. 448 с.

4. *Тихомиров В.В.* Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметром // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 807-810.

5. *Сарсенби А.М.* Критерий базисности Рисса корневых функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады НАН РК. 2006. № 1. С. 44-48.

Резюме

Түпкілікті функциялардың бірқалыпты шенелген болуы олардың Рисс базисі болуы үшін қажетті және жеткілікті екендігі көрсетілген.

Summary

We have proved. That evenly limitenes of root functions is a criterion of their Riss basisnes, in this work.

УДК 517.927.25

ЮКГУ *Поступила 2.05.07г.*