

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В работе рассмотрена применение метода слабой аппроксимации для решения математической модели вытеснения нефти раствором активной примеси, приведены численные результаты. Применение раствора активной примеси при разработке нефтяных месторождений обусловлено процессом повышения нефтеотдачи. Введение дополнительного фактора (активной примеси) повлечет изменение системы уравнений двухфазной фильтрации (или системы Баклея-Левретта). Изучаемая математическая модель состоит из уравнений баланса воды и нефти в потоке, обобщенного закона фильтрации Дарси, условия капиллярного равновесия и уравнений диффузии относительно концентрации активной примеси.

1. О применении метода слабой аппроксимации в задачах массопереноса при двухфазной фильтрации жидкости в пористой среде.

Основные процессы повышения нефтеотдачи отличаются от обычного тем, что к воде добавляется некоторый агент, изменяющий условия течения жидкостей в пористой среде. Этот агент может быть в следующих трех состояниях: растворенный в воде, растворенный в нефти и

адсорбированный на стенках поровых каналов. Система уравнений двухфазной фильтрации имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms\rho_1) + \operatorname{div}(\rho_1 \vec{v}_1) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(1-s)\rho_2) + \operatorname{div}(\rho_2 \vec{v}_2) = 0, \quad (2)$$

$$\vec{v}_i = -k \frac{f_i}{\mu_i} \nabla p_i, \quad (i = \overline{1,2}), \quad (3)$$

$$p_2 - p_1 = p_c \quad (4)$$

индекс «1» соответствует водной фазе, а «2» - нефтяной фазе. В случае применения активной примеси система уравнений (1)-(4) является незамкнутой. Так как активная примесь влияет на все основные характеристики жидкостей и пористой среды: m - пористость, ρ_i - плотности, μ_i - вязкости, f_i - фазовые проницаемости, k - коэффициент относительной проницаемости, p_c - капиллярное давление. Каждое состояние характеризуется массовой концентрацией c и $\varphi(c)$ - активной

примеси в водной и нефтяной фазах, а также $a(c)$ - массой адсорбированной примеси в единице объема пористой среды. При наличии потоков фаз и градиентов концентрации будут возникать потоки примеси. Имеем:

$$c\rho_1\vec{v}_1 + \varphi(c)\rho_2\vec{v}_2 + q_D = q, \quad (5)$$

где q - полный массовый поток примеси, q_D - диффузионный поток примеси. Содержание примеси в элементарном объеме пористой среды dV складывается из ее содержаний в каждом из трех состояний:

$$cms\rho_1 dV + \varphi(c)(1-s)m\rho_2 dV + a(c)dV. \quad (6)$$

Тогда полное содержание примеси в объеме V пористой среды равно:

$$m_A = \int_V [cms\rho_1 + \varphi(c)(1-s)m\rho_2 + a(c)]dV, \quad (7)$$

а полный отток примеси через границу объема ∂V :

$$Q = \int_{\partial V} qnds. \quad (8)$$

С учетом r - скорости порождения (поглощения) примеси в единице объема пористой среды имеем полное порождение примеси в объеме V и в единицу времени выражается в следующем виде:

$$R = \int_V rdV. \quad (9)$$

Баланс содержания примеси в объеме V выражается уравнением:

$$\frac{dm_A}{dt} = R - Q \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} [cms\rho_1 + \varphi(c)(1-s)m\rho_2 + a(c)]dV = \\ = \int_V rdV - \int_{\partial V} \vec{q}nds = \int_V (r - \text{div}\vec{q})dV. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу произвольности объема V имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} [cms\rho_1 + \varphi(c)(1-s)m\rho_2 + a(c)] + \text{div}\vec{q} = r. \quad (12)$$

Подставляя (5) в (12), получаем уравнение баланса примеси:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [cms\rho_1 + \varphi(c)(1-s)m\rho_2 + a(c)] + \\ + \text{div}(c\rho_1\vec{v}_1 + \varphi(c)\rho_2\vec{v}_2) = r - \text{div}\vec{q}_D. \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнении (13) диффузионный поток при некоторых допущениях подчиняется закону Фика: $\vec{q}_D = -D\nabla c$.

Предположим, что изменение системы (1)-(4) происходит по математической модели Баклея-Левретта, то есть $p_c(s, c) = 0$, и $\rho_i = \text{const}$, $i = \overline{1,2}$. Тогда система уравнений (1)-(4) упрощается и приводится к следующему виду:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}\vec{v}_1 = 0, \quad (14)$$

$$m \frac{\partial (1-s)}{\partial t} + \text{div}\vec{v}_2 = 0, \quad (15)$$

$$\vec{v}_i = -k \frac{f_i}{\mu_i} \nabla p_i, \quad (i = \overline{1,2}). \quad (16)$$

Введением суммарной скорости $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ из (14) и (15) получим следующую систему уравнений:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = \text{div}(F(s)\nabla p), \quad (17)$$

$$\text{div}(\Phi(s)\nabla p) = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(c, s)}{\partial t} + \text{div}(c\rho_1\vec{v}_1 + \varphi(c)\rho_2\vec{v}_2) = \\ = \text{div}(D\nabla c) + f(x, t), \end{aligned} \quad (19)$$

где $F(s) = k \frac{f_1(s)}{\mu_1}$, $\Phi(s) = k \left(\frac{f_1(s)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)}{\mu_2} \right)$,

D - коэффициент диффузии, $\varphi(c) = kc$, $U(c, s) = cms\rho_1 + \varphi(c)(1-s)m\rho_2 + a(c)$, $a(c) = \Gamma c$, Γ - постоянная Генри, через $f(x, t)$ обозначено полное порождение примеси в рассматриваемом объеме V .

Полученная система уравнений (17)-(19) является системой составного типа. Для удобства ниже рассматривается соответствующая

начально-краевая задача в двумерном случае по пространственным переменным. Совершенно аналогично применяемый метод слабой аппроксимации (МСА) распространяется на многомерный по пространственным переменным случай.

Начально-краевые условия относительно системы (17)-(19) имеют вид:

$$s|_{t=0} = s_0(x, y), \quad c|_{t=0} = c_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (20)$$

$$s|_{\partial\Omega} = s_1(x, y, t), \quad c|_{\partial\Omega} = c_1(x, y, t), \\ \forall (x, y, t) \in \partial\Omega, \quad (21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y, t), \quad \forall (x, y, t) \in \partial\Omega. \quad (22)$$

Для решения задачи (17)-(22) применить МСА невозможно, так как относительно давления уравнение эллиптического типа. Поэтому сначала рассматривается “ ε -аппроксимация” задачи (17)-(22). При этом система уравнений имеет вид:

$$m \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}(F^\varepsilon(s^\varepsilon) \nabla p^\varepsilon), \quad (23)$$

$$\varepsilon \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}(\Phi^\varepsilon(s^\varepsilon) \nabla p^\varepsilon), \quad (24)$$

$$\frac{\partial U^\varepsilon(c^\varepsilon, s^\varepsilon)}{\partial t} + \operatorname{div}(c^\varepsilon \rho_1 \vec{v}^{\varepsilon, \tau}_1 + \varphi(c^\varepsilon) \rho_2 \vec{v}^{\varepsilon, \tau}_2) = \\ = \operatorname{div}(D \nabla c^\varepsilon) + f^\varepsilon(x, t) \quad (25)$$

и условиям (20)-(22) добавляется еще одно начальное условие:

$$p^\varepsilon|_{t=0} = p_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (26)$$

Исходя из результатов работ [1, 2] расщепим задачу (23)-(25), (20)-(22) на одномерные задачи:

$$m = 1,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial s^{\varepsilon, \tau}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(F(s^{\varepsilon, \tau}) \frac{\partial p^{\varepsilon, \tau}}{\partial x} \right), \quad (27)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial p^{\varepsilon, \tau}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(s^{\varepsilon, \tau}) \frac{\partial p^{\varepsilon, \tau}}{\partial x} \right), \quad (28)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U^{\varepsilon, \tau}(c^{\varepsilon, \tau}, s^{\varepsilon, \tau})}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(c^{\varepsilon, \tau} \rho_1 \vec{v}^{\varepsilon, \tau}_1 + \varphi(c^{\varepsilon, \tau}) \rho_2 \vec{v}^{\varepsilon, \tau}_2 \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c^{\varepsilon, \tau}}{\partial x} \right) + f^{\varepsilon, \tau}(x, t), \quad (29)$$

$$n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial s^{\varepsilon, \tau}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(F(s^{\varepsilon, \tau}) \frac{\partial p^{\varepsilon, \tau}}{\partial y} \right), \quad (30)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial p^{\varepsilon, \tau}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi(s^{\varepsilon, \tau}) \frac{\partial p^{\varepsilon, \tau}}{\partial y} \right), \quad (31)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U^{\varepsilon, \tau}(c^{\varepsilon, \tau}, s^{\varepsilon, \tau})}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(c^{\varepsilon, \tau} \rho_1 \vec{v}^{\varepsilon, \tau}_1 + \varphi(c^{\varepsilon, \tau}) \rho_2 \vec{v}^{\varepsilon, \tau}_2 \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial c^{\varepsilon, \tau}}{\partial y} \right), \quad (32)$$

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \tau < t \leq (n+1)\tau.$$

Здесь $n = 0, 1, \dots, N-1$; $N\tau = T$. На каждом дробном шаге начальные данные берутся с предыдущего дробного шага:

$$v^\tau \left(\left(n + \frac{j}{2} \right) \tau + 0 \right) = v^\tau \left(\left(n + \frac{j}{2} \right) \tau \right), \quad j = \overline{0, 1}.$$

Главная задача: оценить норму разности $v^{\varepsilon, \tau} - v$ через параметры τ и ε , где $v^{\varepsilon, \tau} = (s^{\varepsilon, \tau}, c^{\varepsilon, \tau}, p^{\varepsilon, \tau})$, причем $v^{\varepsilon, \tau}$ - решение задачи (27)-(32) с условиями (20)-(22), а v - решение исходной задачи. Как следует из результатов работы [1], сначала решается регуляризованная задача относительно давления затем относительно водонасыщенности и концентрации: $s^{\varepsilon, \tau}, c^{\varepsilon, \tau}$.

Обозначив через $\varphi^{\varepsilon, \tau}(x, y) = (s_0^{\varepsilon, \tau}(x, y), c_0^{\varepsilon, \tau}(x, y), p_0^{\varepsilon, \tau}(x, y))$ - на-

чальные условия, а также исходя из результатов работ [2, 4] получены следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть решение исходной задачи обладает следующей гладкостью:

$$\left(\|\nabla s^i\|_{q_1, r_1, \Omega_T}, \|\nabla c^i\|_{q_1, r_1, \Omega_T}, \|\nabla p^i\|_{q_1, r_1, \Omega_T} \right) \leq \mu_1,$$

причем

$$\|f(x, t)\|_{q_3, r_3, \Omega_T} \leq \mu_2, \quad r_j > \frac{2q_j}{q_j - n}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|s^i - s\|_{V_2(\Omega_T)} + \|c^i - c\|_{V_2(\Omega_T)} + \|p^i - p\|_{V_2(\Omega_T)} &\leq \\ &\leq \nu^{1/\gamma}(i)\lambda, \end{aligned}$$

где

$$\lambda = \max \left\{ \|s - s_0\|_{V_2(\Omega_T)}, \|c - c_0\|_{V_2(\Omega_T)} \right\},$$

$$\gamma = \max_j \left\{ ((q_j - n)r_j)((q_j - n)r_j - 2)^{-1} \right\},$$

$$\nu(i) = (i - 1 + L)^L h^i, \quad p = \frac{r(1 - \alpha)}{r(1 - \alpha) - 2} > 0,$$

h - произвольное число из отрезка $[0, 1]$,

$$L = 2Tch^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad c = c(\mu, q), \quad r \in (0, 1).$$

Теорема 2. При выполнении условия теоремы 1 и $\phi \in W_2^3(\Omega)$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\nabla p^{\varepsilon, \tau}\|_{2, \Omega_T}^2 + \|\nabla s^{\varepsilon, \tau}\|_{2, \Omega_T}^2 + \|\nabla c^{\varepsilon, \tau}\|_{2, \Omega_T}^2 &\leq \\ &\leq \left\{ \varepsilon \|\nabla p_0\|_{2, \Omega}^2 + \|\nabla s_0\|_{2, \Omega}^2 + \|\nabla c_0\|_{2, \Omega}^2 \right\} e^{k\tau}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2 и условие согласования. Тогда имеет место оценка скорости сходимости:

$$\begin{aligned} \|v^{\varepsilon, \tau} - v\|_{C(0, T; L_2(\Omega))} + \|v^{\varepsilon, \tau} - v\|_{L_2(0, T; W_1^1(\Omega))} &\leq \\ &\leq C \left(\varepsilon + \frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

2. О применении метода слабой аппроксимации для решения одной задачи фильтрации в приближении пограничного слоя. В настоящем пункте рассматривается для простоты

плоская задача фильтрации несмешивающихся жидкостей в области, ограниченной непроницаемыми подошвой и кровлей пласта, а так же нагнетательной и эксплуатационной скважинами. При приближении пограничного слоя применен метод слабой аппроксимации. Полученные расщепления могут быть положены в основу построения ряда разностных схем.

Для фильтрационного течения двухфазной жидкости, описываемого моделью Маскета-Леверетта, образование аналога пограничного слоя Прандтля вязкой жидкости невозможно, так как в каждой точке области фильтрационного течения имеются пористая среда и две компоненты жидкости. Согласно результатам работы [1], модель пограничного слоя двухфазной жидкости применяется для решения проблемы “Концевого эффекта” на эксплуатационной скважине, причем построенная модель не требует задания граничного условия для насыщенности в точке, где расположена эксплуатационная скважина. Кроме того, предложенный в работе [1] алгоритм получения граничного условия при $x = x_0$ состоит из следующих этапов:

1. Из решения граничной задачи для модели Маскета-Леверетта (ML) на промежутке $x \in [0; x_0]$ причем $x=0$ соответствует нагнетательной скважине и $x = x_0$ - эксплуатационной скважине, с фиксированным условием при $x = x_0$ определяется значение водонасыщенности $S(x, y)|_{x=x_0} = S_0(y)$ на некотором заданном сечении $x = x_0 < x_0$, достаточно близком к эксплуатационной скважине.

2. С помощью решения соответствующей задачи для фильтрационного пограничного слоя на промежутке $x \in [x_0, x_0]$ с $S|_{x=x_0} = S_0(y)$ восстанавливается значение $S|_{x=x_0} = S_0(y)$.

3. Решаются уравнения ML-модели с новым значением $S|_{x=x_0} = S_0(y)$, затем возвращается к этапу 2 и т.д.

Постановка задачи. Рассматривается для простоты плоская задача фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в области

$Q_T = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega = \{0 < x < l, 0 < y < h\}$, $0 < t < T$, ограниченной непроницаемыми подошвой и кровлей пласта ($y=0, y=h$), нагнетательной ($x=0$) и эксплуатационной ($x=l$) скважинами:

$$m \frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div}(a(s) \cdot \nabla S + c(s) \cdot v + \vec{f}), \quad (33)$$

$$-\vec{v} = k \cdot \nabla p + \rho \cdot \vec{g}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (34)$$

где $\vec{v} = (u, v)$ - суммарная скорость, m - пористость, $S = S(x, y, t)$ - водонасыщенность, $k, a(s), c(s)$ - коэффициенты абсолютной и относительной проницаемости.

В предположении, что пласт тонкий (h/l - мало), положим

$$k = \delta^2 \tilde{k}, \quad x = \tilde{x}, y = \delta \tilde{y}, u = \tilde{u}, v = \delta \tilde{v}. \quad (35)$$

Не умаляя общности, считаем, что $\vec{f} = 0$. При этом считается, что форма законов Дарси неизменна для пластов любой толщины. Тогда уравнение (34) не подвергается преобразованиям. С учетом (35) преобразуем уравнение (33) для насыщенности, отбросив при этом члены, пропорциональные δ и δ^2 . Возвращаясь к старым переменным и искомым функциям, получаем

$$m \frac{\partial S}{\partial t} - c' u \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(a(s) \frac{\partial S}{\partial y} \right) + c' v \frac{\partial S}{\partial y}, \quad (c' < 0). \quad (36)$$

При $u \geq 0$ вследствие эквивалентности уравнения (36) по переменной x на эксплуатационной скважине не требуется. Далее, считается что компоненты вектора скорости известны и задача рассматривается только относительно насыщенности, что разрешимость задачи относительно давления можно найти, например, из работы [1]. Тогда соответствующие начальные краевые условия имеют вид:

$$S|_{t=0} = S_0(x, y), \quad S|_{x=0} = S|_{y=0} = S_1, \quad S|_{y=h} = S_2, \quad (37)$$

где $0 \leq S_i \leq 1, i = 0, 2$, причем $S_i = \text{const}, i = 1, 2$.

Относительно начальной данной $S_0(x, y)$ предположим, что $S_0(x, y) \in C^2(\Omega)$.

Слабо аппроксимируем задачу (36), (37) задачей

$$m \cdot S_t^\tau = 2 \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(a(S^\tau) \frac{\partial S^\tau}{\partial y} \right) + c' v \frac{\partial S^\tau}{\partial y} \right],$$

$$n \cdot \tau < t \leq \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \tau, \quad (38)$$

$$m \cdot S_t^\tau = 2 \cdot c' \cdot u \cdot S_x^\tau,$$

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \tau < t \leq (n + 1) \cdot \tau, \quad (39)$$

$$S^\tau(0, x, y) = S_0(x, y), \quad (40)$$

$$S^\tau|_{x=0} = S^\tau|_{y=0}, \quad S_{1,} = S^\tau|_{y=h}, \quad S_{2,} = \quad (41)$$

При построении решения задачи (38)-(41) на правых дробных шагах решается первая краевая задача для уравнения теплопроводности, а на вторых дробных шагах - уравнения типа переноса с условиями (40), (41).

Известно, что в случае задачи Коши для уравнения (39) с начальным условием (40) ограниченными вместе со своими производными, может иметь градиентная катастрофа, т.е. может существовать $t > t_0$, такое, что классическое решение этой задачи в полосе $\Pi [t_0, t_1]$, само остается в этой полосе ограниченным, но производная S_x в окрестности некоторой точки (t_1, x) становится не ограниченной:

$$S_x(x, t) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow t_1, x \rightarrow x^0.$$

В нефтяной практики указанный эффект называется "концевым эффектом". Нетрудно показать, что если $|\nabla S_0(x, y)| < C_1$, то классическое решение задачи (39)-(40) существует, ограничено и имеет место оценка

$$|S_x^\tau| \leq \frac{C_1}{1 - 2C_1(t - t_0)}. \quad (42)$$

Неравенство (41) доказывается с помощью теоремы сравнения. Очевидно, что при любом фиксированном решении $S^\tau(x, y, t)$ задачи (38), (40), (41) ограничено постоянной C_0 не зависит от величины τ :

$$|S^\tau(x, y, t)| \leq C_0. \quad (43)$$

Вследствие принципа максимума для уравнения теплопроводности получим

Рис. 1

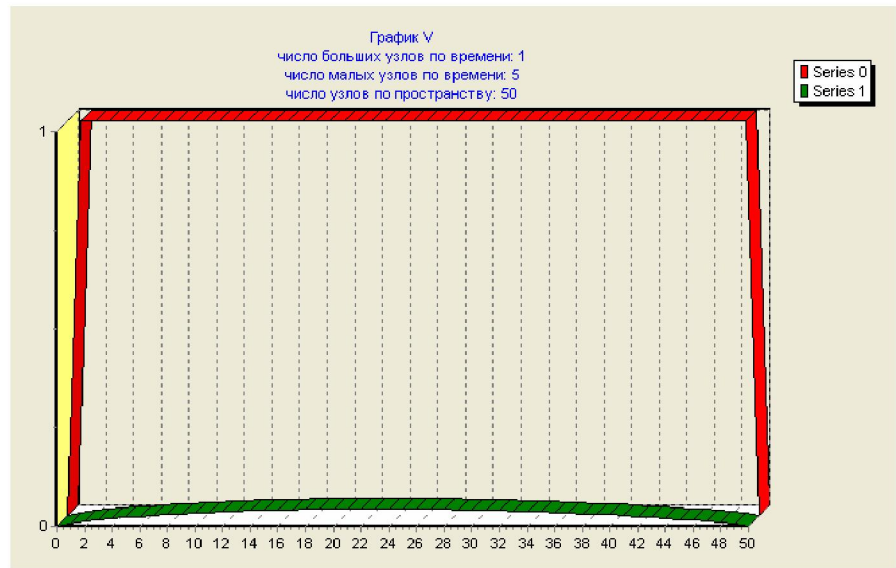


Рис. 2

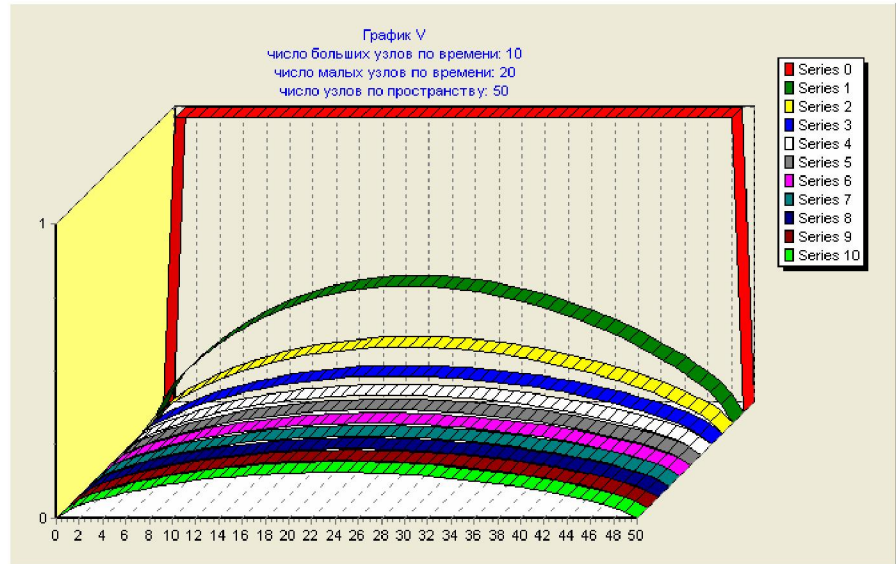
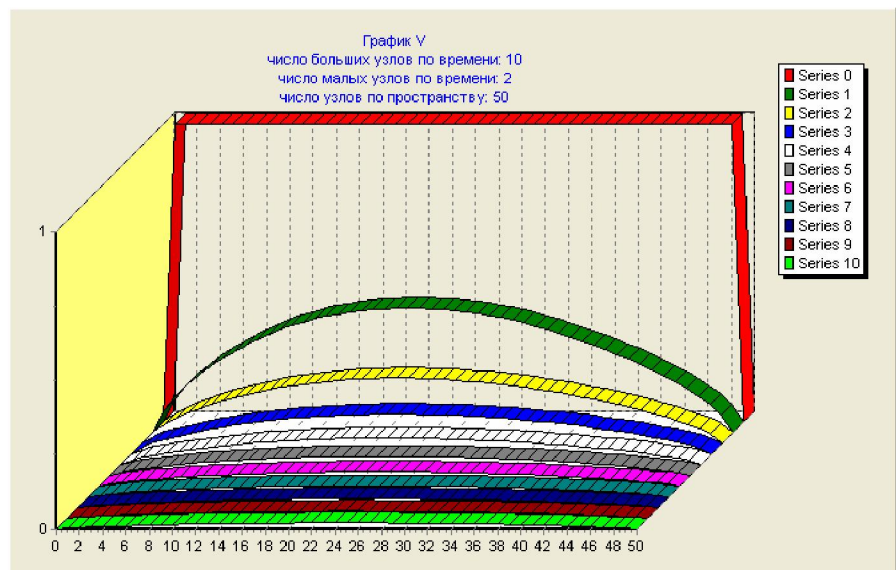


Рис. 3



$$|S_x^\tau(x, y, t)| \leq C_2. \quad (44)$$

На втором дробном шаге вследствие (1.264) вместе (1.266) получим

$$|\nabla S^\tau| \leq \frac{C_3}{1 - C_3\tau}. \quad (45)$$

Повторяя указанный процесс для всех, получим оценку:

$$|\nabla S^\tau| \leq \frac{C_4}{1 - C_4\tau}. \quad (46)$$

Теорема 4. Пусть в условиях (37) данные таковы, что $0 \leq S_0(x, y) \leq 1$, $S_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$, причем $S_0(x, y) \in W_2^3(\bar{\Omega})$. Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости по τ :

$$\begin{aligned} & \|S^\tau - S\|_{L^\infty(0, T; L_1(\Omega))} + \|S^\tau - S\|_{L_2(0, T; W_2^1(\Omega))} \leq \\ & \leq C \cdot \tau, \end{aligned}$$

где C постоянная зависит лишь от норм данных задачи и не зависит от τ .

Обоснование полученных результатов по применению метода слабой аппроксимации для

решения задач теории фильтрации представлены на рис. 1-3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации. Красноярск: Наука, 2000. 215 с.
2. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1985. 234 с.

Резюме

Мұнайды белсенді қоспалардың ерітіндісі арқылы ығыстырып шығарудың математикалық моделін шешу үшін әлсіз аппроксимация әдісін қолдану қаралды. Мұнай кен орындарын өндеуде белсенді қоспалардың ерітіндісін қолдану мұнай өндеуді арттыру процесіне байланысты.

Summary

In work is considered using the method to weak approximation for decision of the mathematical model of the displacing to oils by solution active admixture. Using the solution active admixture at development oil oilfield is conditioned by process of increasing oil returns.

УДК 517.9+532.5

Казахский национальный
университет им аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 12.11.07г.