А. РОГОВОЙ

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ В СЛУЧАЕ НЕ БЕСКОНЕЧНО ГЛАДКИХ КОНТУРОВ

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной: при $y < 0$ - характеристиками $AC : x+y = 0$ и $BC : x - y = 1$, а при $y > 0$ - кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y): \ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad y > 0 \right\},$$

рассматривается однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$u |_{AC \cup \sigma_\delta} = 0, \tag{2}$$

причем должны выполняться следующие условия «склеивания» решения на линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$

$$u(x,+0) = u(x,-0), \tag{3}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0). \tag{4}$$

В работах [1, 2] для более общего уравнения Геллерстедта было показано существование разрывного решения задачи (1)-(4) при определенных условиях. Оказалось, что этот результат можно значительно усилить для целого ряда случаев.

1 Случай $\delta = -\dfrac{1}{2}$

Для данного случая кривая Ляпунова примет вид

$$\sigma_1 = \left\{ (x, y): \ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad y > 0 \right\}. \tag{5}$$

Рассмотрим следующую функцию

$$u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{(1-x)^2 + y^2} = \dfrac{1 - x + y}{(1-x)^2 + y^2} - 1, & y > 0, \\ \dfrac{x + y}{1 - x - y} = \dfrac{1}{1 - x - y} - 1, & y < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Нетрудно показать простой подстановкой, что функция (6) является решением задачи (1)–(4) для контура (5). Но, очевидно, функция (4) имеет разрыв в точке $B(1,0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контура (5), причем это решение представимо по формуле (6).*

2 Случаи $\delta_1 = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$ **и** $\delta_2 = -\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$

Для данного случая кривая Ляпунова примет соответственно вид

$$\sigma_1=\left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2,\quad y>0\right\}, \tag{7}$$

$$\sigma_2=\left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2,\quad y>0\right\}. \tag{7a}$$

Рассмотрим следующую функцию

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)^2+2(1-x)y-y^2}{\left((1-x)^2+y^2\right)^2}-2\dfrac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2}+1, & y>0,\\[2mm] \dfrac{1}{(1-x-y)^2}-2\dfrac{1}{1-x-y}+1, & y<0.\end{cases} \tag{8}$$

Вновь, как и ранее, подстановкой убеждаемся в том, что функция (8), имеющая разрыв в точке $B(1,0)$, является решением задачи (1)-(4) для контуров (7) и (7а). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров (7) и (7а), причем для обоих контуров это решение представимо по формуле (8).*

3 Случаи $\delta_1=\dfrac{1}{2}$, $\delta_2=-\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$, $\delta_3=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Для данного случая кривая Ляпунова примет вид

$$\sigma_1=\left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\quad y>0\right\}, \tag{9}$$

$$\sigma_2=\left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2,\quad y>0\right\}, \tag{9a}$$

$$\sigma_3=\left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2,\quad y>0\right\}. \tag{9б}$$

Рассмотрим следующую функцию

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)^3+3(1-x)^2y-3(1-x)y^2-y^3}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}-3\dfrac{(1-x)^2+2(1-x)y-y^2}{\left((1-x)^2+y^2\right)^2}+3\dfrac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2}-1, & y>0,\\[2mm] \dfrac{1}{(1-x-y)^3}-\dfrac{3}{(1-x-y)^2}+\dfrac{3}{1-x-y}-1, & y<0.\end{cases} \tag{10}$$

Аналогично предыдущему, доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров (9), (9а) и (9б), причем для всех трех контуров это решение представимо по формуле (10).*

4 Случай $\delta = \frac{1}{2} ctg\left(\frac{4p-1}{4n}\cdot\pi\right), \quad n = 1,2,\ldots, \quad p = 1,2,\ldots n$.

Здесь рассматривается важный класс контуров, соответствующий следующим значениям параметра δ:

$$\delta = \frac{1}{2} ctg\left(\frac{4p-1}{4n}\cdot\pi\right), \quad n = 1,2,\ldots, \quad p = 1,2,\ldots n. \tag{11}$$

Для данного случая кривая Ляпунова примет вид

$$\sigma_\delta = \left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y+\delta)^2 = \frac{1}{4}+\delta^2, \quad y>0\right\}, \tag{12}$$

где параметр δ удовлетворяет соотношению (5).

Находя, согласно [3], ненулевое решение задачи (1)-(4) для контуров (6), получим, что функция

$$u(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos\left(k\cdot arctg\frac{y}{1-x}\right) + \sin\left(k\cdot arctg\frac{y}{1-x}\right)}{\left((1-x)^2+y^2\right)^{\frac{k}{2}}} = \\ \displaystyle = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{(1-x)^k + k(1-x)^{k-1}y - C_k^2(1-x)^{k-2}y^2 - C_k^3(1-x)^{k-3}y^3 + \cdots}{\left((1-x)^2+y^2\right)^{\frac{k}{2}}}, & y>0, \\ \displaystyle\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^n = \left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^n, & y<0, \end{cases} \tag{13}$$

является решением однородной задачи (1)-(4) для контуров (12), у которых параметр δ удовлетворяет соотношению (11). Но, как легко видеть, функция (13) имеет разрыв в точке $B(1,0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров (12), для которых выполнено соотношение (11), причем для этих контуров решение представимо по формуле (13).*

5 Случай произвольного δ (общий случай)

Предварительно вводя величины γ_δ и α, определяемые следующими соотношениями

$$ctg\gamma_\delta = 2\delta,$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4\gamma_\delta},$$

а также полярные координаты

$$\begin{cases} 1-x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} r = \sqrt{(1-x)^2+y^2} \\ \varphi = arctg\dfrac{y}{1-x}. \end{cases} \tag{14}$$

получим следующее представление решения

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha\varphi + \sin\alpha\varphi}{r^{\alpha}} - \alpha\dfrac{\cos(\alpha-1)\varphi+\sin(\alpha-1)\varphi}{r^{\alpha-1}} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\dfrac{\cos(\alpha-2)\varphi+\sin(\alpha-2)\varphi}{r^{\alpha-2}} - \ldots, & y>0, \\ \left(\dfrac{x+y}{1-x-y}\right)^{\alpha}, & y<0, \end{cases}$$

(15)

Но, как легко видеть, функция (15) имеет разрыв в точке $B(1,0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Существует разрывное в точке* $B(1,0)$ *решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, причем для этих контуров решение представимо по формуле (15).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роговой А.В.* О гладкости решений задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. 2002. №5(33). С. 50-56.

2. *Роговой А.В.* Решение задачи Трикоми для уравнений смешанного типа методом преобразований Меллина: Автореф. дис. ... к. физ.-мат. н. Шымкент, 2004. 26 с.

3. *Роговой А.В.* Свойства решений однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе для контуров одного класса // Доклады НАН РК. 2007. №3. С. 29-33.

Резюме

Лаврентьев-Бицадзе теңдеуіне Трикоми есебі бір қисық жағдайда үзіліс шешімі бар деп дәлелденген, ал үзілісті шешім тура құрастырылған.

Summary

Homogeneous Tricomi problem for Lavrentjev-Bitsadze equation in wide class of infinitely smooth areas has been considered in the work. The existence of non continuous solution of this problem has been proved for all this class of areas.

УДК 517.946

Поступила 22.11.07г.