N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 297 (2014), 60 – 63

MODEL OF TORSIONAL VIBRATIONS OF THE RUBBER–SHAFT ON THE BASIS OF BARTENEV-HAZANOVICH POTENTIAL

L. Khajiyeva, S. Abdrakhman, A. Rakhimzhanova

Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan

Key words: dynamics, nonlinearity, damping, potential, torsional fluctuations.

Abstract. Dynamics of rotating rod elements of mechanisms and machines from physically nonlinear material is considered. The rod material is characterised by Bartenev-Hazanovich elastic potential. The deformation characteristic is the corner of torsion of one section concerning of a another section. For a considered case the hypothesis of flat sections is accepted. The dynamic model of torsion of a rod element is constructed. The received model has nonlinear character. It is caused by physically nonlinear properties of a material and finiteness of its deformations.

УДК 539.3:621.01

МОДЕЛЬ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЗИНОКОРДНОГО ВАЛА НА ОСНОВЕ ПОТЕНЦИАЛА БАРТЕНЕВА-ХАЗАНОВИЧА

Л. А. Хаджиева, С. Н. Абдрахман, А. Ж. Рахимжанова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: динамика, нелинейность, демпфирование, потенциал, крутильные колебания.

Аннотация. В работе рассматривается динамика вращающихся стержневых элементов механизмов и машин из физически нелинейного материала. Свойства материала стержня задаются упругим потенциалом Бартенева-Хазановича. В рассматриваемом случае характеристикой деформирования является угол кручения одного сечения вала относительно другого. В данном случае принимается гипотеза плоских сечений. Построена динамическая модель крутильных колебаний вала. Полученная модель имеет нелинейный характер. Это вызвано физически нелинейными свойствами материала вала и конечностью его деформаций.

Известно, что высокомолекулярные материалы типа пластмасс и резины характеризуются большим внутренним трением. Установлено, что для наполненных резин величина относительного гистерезиса превышает аналогичную величину для сталей более чем в 100 раз. Поэтому резина, как конструкционный материал, находит широкое применение в технике. В силу своих особенностей резина применяется в качестве демпферов и поглотителей колебаний, применяется в муфтах, соединяющих наиболее перегруженные элементы кинематической цепи машин, в целях гашения возникающих в них нежелательных колебательных процессов.

Резина и подобные материалы относятся к физически нелинейным средам, работа которых далека от принятых в большинстве традиционных расчетных схем моделей линейного деформирования. Поэтому для их моделирования необходимо привлекать общую теорию больших упругих деформаций с физическим законом, отражающим основные свойства материала, и математический аппарат для выведения из этого закона отдельных следствий, необходимых для решения технических задач. Таким законом является зависимость между тензором напряжений и тензором деформаций – упругий потенциал.

В работе рассматривается динамика вращающихся стержневых элементов механизмов и машин из физически нелинейного материала, свойства которого задаются упругим потенциалом Бартенева-Хазановича [1]:

$$W = 2G(\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_1 - 3), \tag{1}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – относительное удлинение единичного элемента среды в трех главных направлениях деформации, G – модуль сдвига. Указанный потенциал описывает поведение упругого, несжимаемого, изотропного тела.

Используя условия изотропности и несжимаемости резины при конечных деформациях $\lambda_1\lambda_1\lambda_1 = 1$, представим упругий потенциал (1) в главных компонентах тензора деформации ε_I (i = 1,2,3):

$$W = 2G\left(\sqrt{1+2\varepsilon_1} + \sqrt{1+2\varepsilon_3} + \frac{1}{\sqrt{1+2(\varepsilon_1+\varepsilon_3+2\varepsilon_1\varepsilon_3)}}\right). \tag{2}$$

Для удобства моделирования в (2) осуществляется переход к главным компонентам деформации $\varepsilon_{xx},..\varepsilon_{zz}$ через следующие соотношения [2]:

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin\left(\bar{\phi}+\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{1}{3}e,\quad \varepsilon_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin\bar{\phi}+\frac{1}{3}e,\quad \varepsilon_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin\left(\bar{\phi}+\frac{4}{3}\pi\right)+\frac{1}{3}e, \tag{3}$$

где

$$e = \varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz} = E_1, \tag{4}$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{e_3}{\bar{e}^3}\right),\quad -\frac{\pi}{6}\le\bar{\phi}\le\frac{\pi}{6}, \tag{5}$$

$$\bar{e}^2 = \frac{1}{6}\left[\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\left(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz}\right)^2+\left(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xx}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\varepsilon_{xx}{}^2+\varepsilon_{yy}{}^2+\varepsilon_{zz}{}^2\right)\right], \tag{6}$$

$$e_3 = -3\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}-\frac{1}{3}E_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy}-\frac{1}{3}E_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz}-\frac{1}{3}E_1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Принимая гипотезу плоских сечений, получен вид потенциала (1) для рассматриваемого случая вращения вала с круглым сечением:

$$W = 2G\left(\sqrt{1+\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}} + \sqrt{1-\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2)}}\right). \tag{8}$$

Компоненты тензора напряжения в любой точки сечения вала при этом определяются как:

$$\tau_{xz} = 2G\frac{\varepsilon_{xz}}{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}} - \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}{\left(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$\tau_{yz} = 2G\frac{\varepsilon_{yz}}{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}} - \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}{\left(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{9}$$

Соотношения (9) представляют собой нелинейный закон деформирования вала из резинокордного материала, описываемого упругим потенциалом Бартенева-Хазановича. Частным случаем (9) является закон Гука. Задавая абсолютную величину векторов напряжений через его составляющие:

$$|\sigma| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}\ , \tag{10}$$

определена ее величина

$$|\sigma| = 2G\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}} - \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}{\left(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{11}$$

В рассматриваемом случае характерным типом деформации является угол поворота сечения $\varphi(z,t)$. Полагая отсутствие депланации сечения вала и используя известные соотношения между перемещениями и углами поворота сечения при допущении конечности деформаций согласно второй системе упрощений В.В. Новожилова, имеем:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(-y - \frac{1}{2}x\varphi\right), \tag{12}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(x - \frac{1}{2}y\varphi\right). \tag{13}$$

Полагая отсутствие депланации сечения вала, переходим от зависимости напряжений от тензора деформаций в общем виде (11) к зависимости между напряжением и характерной в данном случае видом деформации – углом поворота сечения $\varphi(z,t)$:

$$|\sigma| = G\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\sqrt{1+\frac{1}{4}\varphi^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\sqrt{1+\frac{1}{4}\varphi^2}}} + \frac{2\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\sqrt{1+\frac{1}{4}\varphi^2}}{\left(1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\right)^2\left(1+\frac{1}{4}\varphi^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{14}$$

Здесь $\partial\varphi/\partial x$ – относительный угол закручивания, r – радиус-вектор элемента сечения. Зависимость напряжений от угла поворота φ и крутки $\partial\varphi/\partial x$ носит нелинейный характер.

После упрощения (14) согласно второй системе упрощений В.В. Новожилова [3], получена нелинейная зависимость между напряжением и углом поворота сечения, которая отлична от известного закона Гука:

$$\sigma = Gr\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(1+\frac{1}{8}\varphi^2\right) + \frac{19}{8}G\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^3\left(1+\frac{1}{8}\varphi^2\right)^3. \tag{15}$$

Суммируя по длине момент касательных напряжений сечения относительно оси вала

$$M_{кр} = \int_F R|\sigma|dF\ , \tag{16}$$

находится внутренний момент кручения:

$$M_{кр} = GJ_p r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(1+\frac{1}{8}\varphi^2\right) + \frac{19}{8}GJ_p r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^3\left(1+\frac{1}{8}\varphi^2\right)^3\ , \tag{17}$$

интенсивность которого есть величина: